ESSAI

SUR LE

MOUVEMENT DES PROJECTILES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS.

Paris. — Imprimerie de H. V. de Surcy et Ce, rue de Sèvres, 37.

ESSAI

SUR LE

MOUVEMENT DES PROJECTILES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS

PAR M. THIROUX,

CHEF D'ESCADRON D'ARTILLERIE.



Premier cahier --- Partie théorique.

PARIS,

LIBRAIRIE MILITAIRE, MARITIME ET POLYTECHNIQUE

DE J. CORRÉARD,

LIBRAIRE-ÉDITEUR ET LIBRAIRE-COMMISSIONNAIRE,

RUE CHRISTINE, 1.

1852.



ERRATA.

Page 12, ligne 8, au lieu de plus grand que la vitesse, *lisez* : plus grand que le carré de la vitesse.

Page 16, lignes 9 et 14, au lieu de πv^2, *lisez* : πr^2.

Page 17, ligne 13, *au lieu de* 0,012, *lisez* : 0,0012.

Page 21, Table des valeurs de N : Le nombre 0,0000486 se rapporte au calibre de 12,

Celui de 0,00005578 à celui de 8.

Celui de 0,0000451 doit être supprimé.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DU PREMIER CAHIER.

ESSAI

SUR LE

MOUVEMENT DES PROJECTILES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS.

AVERTISSEMENT.

L'étude approfondie de la balistique, exigeant habituellement des connaissances mathématiques assez étendues, que ne possèdent pas la plupart des officiers ; nous nous sommes proposé dans cet opuscule de réduire tellement les notions de calcul différentiel et intégral et de mécanique nécessaires pour comprendre notre méthode, qu'un lecteur put les acquérir en quelques heures. Ces notions seront l'objet d'un chapitre supplémentaire.

La théorie que nous allons exposer présente l'avantage de donner des formules complétement algébriques, au lieu des formules exponentielles qu'on obtient dans les diverses hypothèses admises jusqu'à présent. Quelques-unes de ces formules sont d'une grande simplicité. De plus, la nouvelle hypothèse coïncide assez bien avec les expériences anciennes et

modernes, et particulièrement avec celles qui ont été faites récemment à Vincennes sur le tir des armes à feu portatives, pour être adoptée par les calculateurs.

Ce qu'il y a de très-remarquable, c'est que notre hypothèse conduit à peu près aux mêmes résultats que celle de M. le commandant d'artillerie Didion, et que le système de tables imaginé par ce savant officier peut s'y adapter aisément. Nous renverrons donc provisoirement le lecteur aux tables de M. Didion et à son traité de balistique, qui résume ce qui a été fait de mieux sur cet objet.

CHAPITRE I.

DE LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.

Supposons un mobile terminé par une surface plane s dirigée perpendiculairement à la ligne qu'il suit, en appelant R la résistance du fluide, supposée constante pendant un trajet infiniment petit dx; le travail de cette résistance sera Rdx.

Bien que la résistance du fluide soit variable à tout moment, on peut néanmoins assimiler son action à celle d'une force accélératrice constante pendant le trajet dx. Or, si l'on appelle γ la force accélératrice appropriée à l'effet de la résistance cherchée, on aura $R = m\gamma$, m étant la masse des particules choquées dans le trajet dx, de la même manière qu'on a $P = mg$, P étant le poids d'un corps et g l'action de la pesanteur.

Pareillement, en appelant v la vitesse avec laquelle le projectile choque les particules fluides, et qu'il communique à celles qui le touchent immédiatement, on aura $v^2 = 2\gamma . dx$, d'où l'on tire $\gamma = \frac{v^2}{2dx}$; substituant dans l'équation $R = m\gamma$, il viendra $R = \frac{mv^2}{2dx}$ ou $Rdx = \frac{mv^2}{2}$. (A) Rdx est le travail de la

résistance de l'air, $\frac{mv^2}{2}$ est l'impulsion communiquée aux particules fluides qui ont dû acquérir précisément le mouvement qui a été perdu par le corps.

En appelant δ le poids d'un mètre cube du fluide sdx, δ sera le poids du prisme ou du cylindre choqué, et $\frac{s\delta dx}{g} = m$ sera sa masse; substituant dans l'équation (A), on obtient $R = \frac{s\delta v^2}{2g}$ (B).

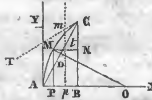
Il semblerait que la résistance de l'air dût croître dans un plus grand rapport que les surfaces des projectiles; les particules fluides éprouvant d'autant plus de difficulté à s'échapper, que la surface qui leur est opposée est plus large; mais les expériences de Hutton, faites en 1775 et ultérieurement; celles faites à Metz, en 1846, semblent prouver que la résistance de l'air est sensiblement proportionnelle à la surface, du moins pour les projectiles sphériques, les seuls qui aient été expérimentés à une grande échelle. Il est à présumer que cet effet est dû à des compensations difficiles à apprécier.

Il est évident que l'action des filets fluides est d'autant moins énergique, qu'ils frappent la surface du mobile plus obliquement. Si donc on appelle I la fonction par laquelle il faut multiplier s pour tenir compte de la forme de la surface, on aura :

$$R = \frac{Is\delta v^2}{2g}$$

Les anciens géomètres avaient admis que l'action de la résistance de l'air sur une surface oblique était égale à celle sur la projection de cette surface, sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement, multipliée par le carré du sinus de l'angle d'incidence des filets fluides. Cette loi ne s'écarte pas

extrêmement des résultats de l'expérience dans certaines limites, mais elle est tout à fait inexacte au delà.



Soit AC l'arc générateur de la surface antérieure du mobile, AB le rayon du cercle de sa base, *fig.* 1. L'équation du cercle générateur AC, supposé avoir son centre en O, est $y^2 = 2\,R\,x - x^2$ en supposant $AO = R$, $AP = x$, $PM = y$. Soit $AB = r$, on aura $MN = r - x$ et la projection de la couronne infiniment petite, ayant Mm pour côté, sera $2\pi(r - x)\,dx$; or, le carré du sinus de l'angle d'incidence Mmt sera $\frac{dx^2}{ds^2}$, et on obtiendra $2\pi(r - x)\frac{dx^3}{ds^2}$ pour la différentielle de la quantité Is.

Mais on a : $ds^2 = dx^2 + dy^2$, qui, dans le cercle dont l'équation est $y^2 = 2\,R\,x - x^2$, donne : $ds^2 = \frac{R^2dx^2}{2\,R\,x - x^2}$, substituant, il vient : $\frac{2\pi}{R^2}(r - x)\ (2\,Rx - x^2)\,dx$; développant et intégrant on a $\frac{2\pi}{R^2}\left(Rrx^2 - \frac{rx^3}{3} - \frac{2Rx^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)$. La constante étant nulle.

La résistance sur la surface engendrée par l'arc AC est donnée par la supposition $x = r$, et on a alors $\frac{2\pi}{R^2}$ $(\frac{1}{3}Rr^3 - \frac{1}{12}r^4) = \frac{2}{3}\pi r^2\left(\frac{r}{R} - \frac{1}{4}\frac{r^2}{R^2}\right)$.

Si la balle était sphérique, on aurait $r = R$, et la fonction

précédente se réduirait à $\frac{1}{2}\pi r^2$, c'est-à-dire à la moitié de la surface d'un grand cercle, comme l'ont admis Lombard d'Obeinheim et tous les anciens calculateurs.

Pour une balle ogivale dans laquelle on aurait $r = 8$ mil. 6, $BC = 20$ mil. 1, les deux triangles rectangles ADO et ACB sont semblables, comme ayant l'angle A commun ; on aura donc AC : AO : : AB : $\frac{1}{2}$ AC, d'où l'on tire $AO = \frac{1}{2}\frac{AC^2}{AB} = \frac{\overline{201}^2 + \overline{8.6}^2}{17.2} = 27$ mil. 78, et $\frac{27.28}{8.6} = \frac{R}{r}$ ou $R = 3,23r$;

substituant il vient : $\pi r^2 \left(\frac{1.9876}{10.433}\right) = 0.1904\,\pi r^2$;

mais on a pour la sphère $\frac{1}{2}\pi r^2$ ou $0.5\,\pi r^2$. On voit donc que d'après l'ancienne théorie la résistance sur la balle ogivale serait à celle sur la balle sphérique : : 19 : 50 ou : : 1 : 2.631...

Dans la balle ogivale l'angle TCN est facile à calculer : on a : $\text{tang. } Mmt = \frac{dx}{dy} = \frac{y}{R - x}$ et *tang*. $TCN = \frac{BC}{BO} = 1.0477$ répondant à 46° 21′ en nombre rond ; l'angle au sommet de la balle est donc de 92° 42′, c'est-à-dire un peu plus ouvert qu'un droit.

D'après les expériences faites en Suède sur des boulets allongés, la résistance de l'air sur des boulets à pointe conique a été la même que sur des boulets à pointe ogivale. La pointe du cône était de 45°, celle de l'ogive de 90°, c'est-à-dire qu'on avait $R = 2r + r\sqrt{2} = 3.414\,r$; or, l'angle d'incidence moyen sur la pointe ogivale était de $\frac{0 + 45°}{2} = 22°1/2$, l'angle d'incidence sur le cône était aussi de 22° 1/2. Il semblerait donc résulter de ces expériences que : quand l'angle d'incidence moyen est le même pour un cône et pour une surface annulaire, la résistance est la même pour les deux surfaces.

Un fait assez remarquable de l'ancienne théorie de la résistance de l'air, c'est que pour la sphère, la résistance était la même que pour le cône droit dont l'angle au sommet était de 90°, ce qui tenait à ce que les angles moyens d'incidence étaient les mêmes ; on avait en effet pour la sphère $\frac{0+90°}{2} = 45°$ et pour le cône 45°, et comme $sin^2\ 45 = \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}\pi r^2$ dans les deux cas.

Quelques auteurs pensent que la résistance sur la balle ogivale est peu différente de celle sur la balle sphérique ; telle n'est pas notre opinion. Sans doute, le résultat de 19 à 50 est exagéré, mais il est évident que la résistance de l'air est diminuée par l'allongement de la pointe. C'est un fait expérimental qui nous paraît hors de doute.

Dans les expériences dont nous venons de parler, et qui ont été faites à Aker en Suède vers la fin de 1845, sur des canons de 30 rayés ; on a tiré, entre autres, 4 obus à pointe ogivale de 90° et à culot hémisphérique, deux la pointe en avant et deux la pointe en arrière. Les deux obus qui avaient la pointe en avant ont été plus loin que les deux autres. Ces expériences démontrent donc, d'une manière évidente, que la résistance sur la pointe ogivale est moindre que celle sur un hémisphère.

D'après les expériences de Hutton, sur les surfaces coniques, si l'on appelle i l'angle d'incidence du fluide sur la génératrice du cône, L un coefficient constant à déterminer par l'expérience : on aura $(sin\ i)^{L\ cos.\ i} = I$. I étant la fonction par laquelle il faut multiplier la projection de la surface antérieure du mobile sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement.

Or, si nous admettons que pour $i = 25°\,42'$ on ait eu $I = 0.443$, ce qui est très-rapproché des résultats obtenus par

Hutton, on trouve $L=1.1126$, et la formule dont il s'agit ici devient :

$$I=(sin.\ i)^{1.1126\ cos.\ i}$$

Pour $i=22°\ 1/2$, angle d'incidence moyen des boulets ogivaux, on a $I=(0.3827)^{1.028}=0.3725...$

D'après Hutton la résistance de l'air sur un hémisphère est 0.417, la résistance sur la sphère serait à celle sur les boulets ogivaux : : 417 : 372.5. Mais ces expériences ont été faites avec des vitesses très-petites, et il ne nous paraît pas démontré que la valeur 0.427 soit plus exacte que celle 0.5 admise par Besout, Lombard et presque tous les calculateurs. D'ailleurs Hutton admet lui-même, dans ses nouvelles expériences d'artillerie, $I=\frac{1}{2}$; le rapport en question sera donc : : 500 : 372.5.

Soit *sin* $i=0.2$ répondant à un angle au sommet de 23° 6′ environ, on aura $I=(0.2)^{1.1126\times 0.979}=0.2^{1.089}=0.1733$, au lieu de 0.2 que donne la résistance proportionnelle au simple sinus, et de 0.04 qu'on déduit de la proportionnalité au carré du sinus, quantité beaucoup trop faible.

Pour un fer de flèche dans lequel on aurait *sin* $i=0.1$, répondant à un angle au sommet de 11° 30′ environ, il viendrait :

$$I=(0.1)^{1.1126\times 0.995}=(0.1)^{1.107}=0.0775,$$

à peu près le $\frac{1}{13}$ de la résistance sur la surface d'un grand cercle.

On voit par cette formule, que l'allongement de la pointe du mobile semble diminuer la résistance de l'air d'une manière notable, bien que cette diminution soit beaucoup plus faible que ne le supposait la résistance proportionnelle au carré du sinus de l'angle d'incidence.

Examinons maintenant si la formule concorde avec les cas

extrêmes. Pour $i = 90°$ on trouve $I = 1$, ce qui doit être; pour $i = 0, I = 0$.

Pour $i = 45°$ on a : $I = (sin\,45°)^{1.1126\,cos.\,45°} = (0.7071)^{1.1126 \times 0.7071} = (0.7071)^{0.7867} = 0.7611$.

Pour les surfaces courbes, la moyenne des valeurs de I pour les inclinaisons extrêmes, du moins pour des courbes circulaires, donne des résultats fort approchés de l'expérience : on a dans ce cas $I = \frac{(sin.\,i)^{1.1126\,cos.\,i} + (sin.\,i')^{1.1126\,cos.\,i'}}{2}$; dans le cercle on a $i = 0$, $i' = 90°$, et partant $I = 0.5$ valeur conforme à celle admise en général, et qui nous paraît vraie pour les grandes vitesses. Pour les boulets ogivaux on a $i = 0$, $i = 45°$, $I = \frac{0.7611}{2} = 0.3805$ au lieu de 0.3725 que donne la formule de Hutton. Il est clair qu'une différence de 0.008 dans la valeur de I, pour les boulets coniques et les boulets ogivaux, devait être sans influence appréciable sur les portées obtenues, ainsi que l'a démontré le tir comparatif des obus ogivaux et coniques, mentionné ci-dessus.

Cherchons maintenant la valeur de I qui résulte des expériences d'Aker.

A la charge de 4 kil. la portée de l'obus qui avait la pointe en avant a été de 3381 m., tandis que celui qui offrait son hémisphère à l'action de la résistance de l'air n'a été qu'à 2,995 m. A la charge de 6 kil. le projectile qui avait la pointe en avant a été à 4037 m., tandis que celui dont l'hémisphère était en avant n'a porté qu'à 3,789 m. L'angle de tir de ces quatre projectiles était de 13°, leur diamètre moyen de 163 mil. environ, leur poids moyen de 31 kil. 300.

Or, la valeur moyenne du rapport de I, dans le cas de la sphère et de l'ogive, est de 0.761 d'après les valeurs obtenues à l'aide de la formule modifiée :

$$I = \frac{(sin.\, i)^{1.1126\, cos.\, i} + (sin.\, i')^{1.1126\, cos.\, i'}}{2}$$

en prenant la résistance sur la sphère pour unité.

La valeur moyenne déduite des quatre expériences ci-dessus est 0.7658... qui ne diffère de la précédente que de 0.0048.

On peut donc admettre que la résistance sur le boulet ogival est les 0.765 de celle sur le boulet sphérique de même diamètre ou les 0.3875 de celle sur un grand cercle. Comme la balle ogivale présente à peu près les mêmes angles d'incidence que les boulets dont nous venons de parler, on peut admettre que la résistance éprouvée par sa partie antérieure n'est que les 0.765 de celle éprouvée par la balle sphérique de même diamètre.

Quant à l'effet direct de la résistance de l'air sur les cannelures de la balle, il paraît assez minime, les balles qui sont pourvues de cannelures conservant à peu près les mêmes vitesses finales que celles qui n'en ont pas. Cependant cet effet, tout faible qu'il est, paraît fort utile pour régulariser le mouvement du projectile.

Si l'on admet que la résistance éprouvée par la balle allongée soit la même que pour la balle sphérique, la résistance due à l'action des cannelures serait de 1 — 0.765 = 0.235.

A mesure que le projectile s'allonge et devient d'un plus fort calibre, la masse à diriger croît comme le cube des dimensions homologues, tandis que la surface, sur laquelle la résistance de l'air exerce son action, ne croît que comme le carré des mêmes dimensions. L'action directrice des cannelures devient donc d'autant moins énergique que le mobile est d'un plus fort calibre : on est donc conduit à augmenter la surface des cannelures dans la proportion du calibre des boulets à diriger.

D'un autre côté on conçoit que les filets d'air comprimé qui glissent le long de la surface latérale du projectile pouvant se dilater librement et éprouvant à distance, une sorte de succion produite par la raréfaction du fluide à la partie postérieure du mobile, perdent leur tension très-rapidement ils doivent être d'ailleurs arrêtés en partie par l'afflux de l'air qui se précipite dans l'espace où le fluide est raréfié. D'après quelques expériences sur les balles allongées, l'action de l'air sur les cannelures serait au moins en raison inverse du cube de la distance à la base de l'ogive ou du cône que forme la pointe du projectile. De là, la nécessité de donner aux cannelures une largeur de plus en plus grande, à mesure qu'elles sont plus éloignées. Et, comme cet effet tient à la constitution du milieu, plutôt qu'à la longueur du projectile, il en résulte qu'il y a telle espèce de projectile pour laquelle l'action directrice des cannelures devient tout à fait impossible, à cause des dimensions excessives qu'il faudrait leur donner pour en rendre l'action efficace. C'est ce qui résulte des expériences faites en Suède sur cet objet.

Il est à présumer que la tension de l'air comprimé décroît dans une progression très-rapide donnée par une formule de la forme $t = Ab^{cx}$, x étant la distance, et A, b, c, des coefficients à déterminer par l'expérience.

Besout, Lombard d'Obcinheim et la plupart des calculateurs, auxquels il faut joindre Hutton, ont admis $I = \frac{1}{2}$ et partant $Is = \frac{1}{2}\pi r^2$ pour les projectiles sphériques.

Indépendamment de la valeur de Is il y a lieu d'introduire un coefficient constant qui, d'après Newton et Besout et d'autres calculateurs, serait ici égal à l'unité; car d'après Newton la résistance de l'air est mesurée par le poids d'une colonne fluide, ayant pour base la surface s et pour hauteur celle due à la vitesse actuelle du mobile. Or, si h est cette hauteur, on aura

$v^2 = 2g\,h$ et l'équation (A) $R = \frac{I s \delta v^2}{2g} = I s \delta h$.

Lombard et d'Obeinheim ont donné au coefficient constant une valeur un peu plus grande; ce coefficient est à celui de Besout :: 6 : 5 ou :: 1.2 : 1... en sorte qu'on a $R = 1,21 s \delta h$.

Pour les projectiles sphériques on a donc, d'après Besout, $R = \frac{0.25 \pi r^2 \delta v^2}{g}$ et d'après Lombard $R = \frac{0.3 \pi r^2 \delta v^2}{g}$.

Robins est le premier qui ait démontré que la résistance de l'air croissait dans un rapport plus grand que la vitesse. Hutton, qui vint ensuite, chercha les lois de cet accroissement. D'après cet auteur, la résistance de l'air a pour expression $R = 0.25 \frac{\mu \pi r^2 v^2 \delta}{g}$, μ étant un coefficient qui varie avec la vitesse et va en croissant jusqu'à la valeur de 2.08 répondant à la vitesse de 487^m, et diminue ensuite de manière à se réduire à 2 pour la vitesse de 610^m. Nous donnerons tout à l'heure la table des valeurs de ces coefficients, calculés par M. Terquem.

M. le général d'artillerie Duchemin a représenté cette suite de coefficients par la relation $1 + \frac{v}{416}$ qui donne des résultats assez exacts jusqu'à 416^m ; passé cette limite, il suppose μ constant et égal à 2, en sorte que la variation de μ est représentée par une ligne brisée.

Malgré la coïncidence de la loi adoptée par M. Duchemin avec celle observée par Hutton, l'impossibilité de faire entrer dans les calculs la ligne brisée dont on vient de parler, a obligé les divers auteurs de balistique à modifier la loi de M. Duchemin. C'est ainsi que le commandant Didion a définitivement représenté la loi des variations de μ par l'équation de la ligne droite :

$$\mu = 1 + \frac{v}{434.77} \text{ ou } = 1 + 0.0023v \ldots$$

L'introduction du coefficient μ s'explique très-aisément.

Dans les fluides élastiques, les molécules gazeuses sont comprimées, à la partie antérieure des mobiles qui les traversent avec une grande vitesse, et raréfiées à leur partie postérieure. Cette condensation et cette raréfaction, qui sont d'autant plus grandes que la vitesse est plus considérable, agissent d'une manière très-énergique pour diminuer la vitesse du projectile.

De ce que l'air est comprimé à la partie antérieure du mobile, il en résulte qu'il en entraîne une certaine quantité avec lui, ce qui doit encore contribuer à diminuer la vitesse.

Toutefois, les molécules fluides qui se précipitent en arrière produisent un remous, qui doit compenser cette cause de ralentissement.

La cohérence des molécules fluides entre elles, leur adhérence à la surface des mobiles, jouent peut-être aussi un certain rôle qui n'a point été apprécié jusqu'à présent pour le mouvement dans l'air, mais qui est très-énergique dans les liquides.

L'espèce de proue que forme l'air comprimé en avant du mobile, expliquerait assez bien la diminution du coefficient μ pour des vitesses au delà de 487^m : cette proue augmentant de longueur, à mesure que la vitesse augmente, les filets fluides sont alors déviés de plus loin, et leur action sur le mobile est moins directe.

On pourrait encore conclure de là que passé certaines vitesses, pour des surfaces données, l'influence de la forme de la partie antérieure du mobile se fait de moins en moins sentir. S'il en était ainsi, il y aurait pour les projectiles allongés, doués d'une certaine vitesse, une limite d'acuité, passé laquelle l'allongement de la pointe n'aurait plus d'influence. Cependant il

arriverait toujours un moment, où la vitesse du mobile serait assez réduite, pour que la diminution de l'angle d'incidence de la résistance de l'air, procurât des avantages sensibles. C'est une question qu'il est nécessaire d'étudier.

La colonne fluide qui représente par sa tension la résistance que le mobile éprouve, est relativement d'autant plus allongée que le mobile est d'un plus petit diamètre. La stabilité de la colonne en question est évidemment en fonction de la densité du mobile.

Cette colonne, qui se renouvelle à tout moment, doit éprouver un mouvement oscillatoire régulier à la manière des ondes. Or, ces oscillations ayant pour objet de développer une force centrifuge, la résistance du milieu pourra en être augmentée. C'est sans doute à cause de ces oscillations que les trajectoires des mobiles légers sont si variables dans leur forme; on conçoit, en effet, que la combinaison de ce mouvement d'oscillation avec celui de translation doit donner lieu aux phénomènes les plus variés (1).

La force centrifuge développée exercera une action d'autant moindre que le mobile sera d'un plus fort calibre. Il peut se faire que l'augmentation de résistance due à cette cause. compense les avantages que devrait procurer une petite surface, dans les projectiles d'un faible diamètre.

Il résulte de là que la valeur de δ ne saurait être considérée comme constante et que les variations qu'elle subit doivent être exprimées en fonction de la vitesse. D'après M. Duchemin et M. Didion, on a pour la densité $\delta\,(1 + 6v)$, mais nous pensons que le décroissement doit être plus rapide, et nous poserons au lieu de $\delta(1+6v)$; $\delta v^{\frac{1}{2}}$, moyenne géométrique entre δ et δv multipliée par le coefficient φ.

(1) Lorsqu'on suit le tir du canon par un temps de pluie fine et abondante, les oscillations dont nous parlons deviennent très-visibles.

D'après cela l'expression générale de la résistance de l'air deviendra : $R = \frac{\varphi I s \delta v^{\frac{5}{2}}}{2g}$, et si les projectiles sont à base circulaire $s = \pi r^2$ et partant $R = \frac{\varphi I \pi r^2 \delta v^{\frac{5}{2}}}{2g}$.

Nous allons donner ci-joint le tableau des valeurs de μ et des quantités correspondantes trouvées par M. le général Duchemin, le commandant Didion et par la formule $\varphi \sqrt{v}$.

La valeur $\mu = \varphi \sqrt{v}$ donne $\mu^2 = \varphi^2 v$ qui est l'équation d'une parabole. Ici la valeur de μ croît avec la vitesse, mais dans un rapport plus faible que dans la formule de M. Didion.

VITESSES en mètres.	HUTTON.	DUCHEMIN.	DIDION.	$\varphi \sqrt{v}$.
31	1.36	1.07	1.07	0.54
61	1.39	1.15	1.14	0.75
91	1.42	1.22	1.21	0.92
122	1.44	1.29	1.28	1.06
152	1.46	1.37	1.35	1.19
183	1.50	1.44	1.42	1.30
213	1.55	1.51	1.49	1.41
244	1.62	1.59	1.56	1.50
274	1.69	1.66	1.63	1.60
305	1.77	1.73	1.70	1.68
335	1.84	1.81	1.77	1.76
366	1.91	1.88	1.84	1.84
396	1.98	1.95	1.94	1.92
427	2.03	2.00	1.98	1.99
457	2.06	2.00	2.05	2.06
487	2.08	2.00	2.12	2.13
518	2.07	2.00	2.19	2.19
549	2.06	2.00	2.26	2.26
579	2.03	2.00	2.33	2.32
610	2.00	2.00	2.40	2.38

La formule de M. Didion ayant été vérifiée pour les grandes

vitesses, nous remarquerons que l'expression $\varphi \sqrt{v}$ donnant des résultats presque identiques avec ceux de la formule $1 + 0.0023v$ peut être considérée comme justifiée par l'expérience depuis 274^m jusqu'à 610^m.

Tous ceux qui ont appliqué la planchette de M. d'Obeinheim ont remarqué qu'elle donnait des résultats parfaitement exacts pour des vitesses de 150 à 160^m. Il en est de même des tables de Lombard, et dans ce cas on a $1.19 \times \frac{0.25 r^2 \delta v^2}{g} = 0.2975$, ou plutôt $0.3 \frac{\pi v^2 \delta v^2}{g}$ qui est l'expression de la résistance de l'air, d'après Lombard et d'Obeinheim.

La formule $\varphi \sqrt{v}$ peut donc être considérée comme étant vérifiée pour toutes les vitesses jusqu'à 150^m. D'un autre côté, pour les mouvements plus lents, la vitesse de 106 par exemple, on aura $\varphi \sqrt{v} = 1$ et $\frac{0.25 \pi v^2 \delta v^2}{g}$, valeur de la résistance de l'air, qui est celle adoptée par Besout.

Nous comparerons plus tard les résultats de notre hypothèse avec ceux donnés par l'expérience pour les mouvements les plus lents en usage dans le service de l'artillerie. On conçoit facilement que la fonction $\varphi \sqrt{v}$, décroissant très-rapidement, doit donner des résultats trop faibles pour les petites vitesses; mais il est à remarquer que cet inconvénient est à peu près nul, quant aux applications, ainsi qu'on pourra s'en convaincre. Le décroissement de la résistance de l'air est beaucoup plus rapide pour les faibles vitesses que ne le suppose Hutton. Ce fait, observé par Lombard et d'Obeinheim, leur avait fait penser que pour les faibles vitesses la résistance de l'air était proportionnelle à la simple vitesse. L'exagération d'effet dont nous parlons se manifeste principalement dans le tir ordinaire des bombes pour lesquelles la résistance de l'air est beaucoup plus

petite que ne le supposent les formules de l'auteur anglais.

C'est à l'application trop exclusive des coefficients de Hutton qu'on a vu se répandre dans le public militaire cette opinion que les balles de fusil n'étaient plus meurtrières à 600^m, opinion que des expériences spéciales, faites en France avec beaucoup de soin, ont prouvé être tout à fait erronée.

Besout et Lombard ont admis que la pesanteur spécifique moyenne de l'air était 850 fois plus petite que celle de l'eau. On a donc dans ce cas $\delta = \frac{1000^k.}{850} = 1^k.1764$, ou d'après les données anciennes $\delta = 1.1759$. On ne tient pas compte ici de la pression atmosphérique, qui est censée marquée par la hauteur moyenne du baromètre. Suivant Hutton, la pesanteur spécifique moyenne de l'air est de 0.012 ; conséquemment le poids d'un mètre cube d'air serait $\delta = 1^{k}.200$.

D'après les expériences de Metz, le poids d'un mètre cube d'air est de $1^k.208$ pour une température moyenne de 15°, une atmosphère à moitié saturée de vapeur d'eau, et une hauteur barométrique de 75 cent.

Le poids de l'air est évidemment proportionnel à la pression, ainsi on a pour une hauteur barométrique de 76^c. $\delta = \frac{76}{75} \times 1^k.208$.

L'élévation de température amène une diminution dans le poids du mètre cube d'air, le refroidissement produit un effet contraire. Ainsi on sait que chaque augmentation de 1° centigrade produit une augmentation de 0.00375 dans le volume. Si la température était à 0°, le volume serait réduit de $0.00375 \times 15 = 0.05625$, et le mètre cube d'air serait ramené à $1 - 0.05625 = 0,94375$; on aurait alors pour le poids du mètre cube entier $0,94375 : 1 :: 1^k.208 : x = \frac{1.208}{0.94375} =$

$1^k.28$. Si la pression était de 76 cent. on aurait $\delta = 1.28 \times \frac{76}{75} = 1.297$. On sait que le poids du mètre cube d'air sec à la température de 0° et à la pression de 0.76 c. a été trouvé de 1.299k. ou $\frac{1}{770}$ de l'eau distillée.

La vapeur d'eau étant moins lourde que l'air, on conçoit que plus il en contiendra, plus il sera léger, et réciproquement, la tension accusée par le baromètre comprenant celle exercée par l'air et par la vapeur d'eau.

On sait que le poids de la vapeur d'eau est à peu près les $\frac{5}{8}$ de celui de l'air, et que la quantité de vapeur que contient un mètre cube d'air saturé est la même que dans le vide et dépend de la température. Ainsi à 0° la tension de la vapeur n'est que de 5 mil. 059, à 15° elle est de 12 mil. 83, à 30° elle est de 30 mil. 643, à 100° elle est de 760 mil. La tension de la vapeur d'un mètre cube d'air qui en est saturé est donc de 12.83 mil. à la température de 15°.

En partant du poids normal du mètre cube d'air sec à 0° et sous la pression de 76°, on aura pour une température de 15° et un air à moitié saturé 6 mil. 41 pour la pression exercée par la vapeur d'eau et 753 mil. 59 pour celle de l'air; d'un autre côté le mètre cube d'air étant dilaté deviendra $1 + 15 \times 0.0035 = 1.05625$, et le mètre cube pèsera :

$$\frac{1.299}{1.05625} \times \frac{753^{mil.}59 + \frac{5}{8}6.41}{760} = 1^k.225.$$

Pour la pression de $750^{mil.}$ on aura : $1.225 \times \frac{75}{76} = 1^k.2088$.

Lorsqu'on aura déterminé le coefficient constant de la résistance de l'air, d'après les données de l'expérience et une valeur déterminée δ; si δ vient à varier et devient δ', le coefficient

doit être multiplié par $\frac{\delta'}{\delta}$. Dans le cas des expériences de Metz on a $\frac{\delta'}{1.208}$.

Calculons maintenant la résistance que l'air oppose à la balle du fusil.

On a d'après Hutton :

$R = \frac{0.25\mu\delta\pi r^2}{g} v^2$. Soit $v = 450^m$, on a $\mu = 2.053$; soit $r = \frac{16^{mil}.7}{2} = \frac{0.0167}{2}$, on a $\pi r^2 = 0.000219$. Admettons la valeur $\delta = 1^k.208$, $g = 9^m.809$, on trouvera $R = 2^k.803$. Comme la balle pèse environ 27^g la résistance qu'elle éprouve sera égale à 103.82 fois son poids.

Cette résistance est à celle que donnerait la formule de Besout :: 2.053 : 1.....

M. le commandant Didion pose : $R = 0.028\pi r^2 v^2 (1 + 0.0023v)$, d'où l'on tire $R = 2^k.527$, équivalant à 93 fois le poids du projectile.

Notre formule $R = \frac{\varphi I\delta\pi r^2 v^{\frac{5}{2}}}{2g}$ devient quand on y suppose $I = \frac{1}{2}$; $\delta = 1^k.208$; $R = 0.0027\pi r^2 v^{\frac{5}{2}} = 2^k.54$, équivalant à 94 fois le poids de la balle.

Lorsque la vitesse est réduite à 100^m. la formule de M. Didion donne $R = 75^g$., tandis que d'après notre formule cette résistance ne serait que de 59^g...., résultat qui nous paraît très-près de la vérité.

Pour un boulet de 12 animé d'une vitesse de 450^m et ayant $119^{mil.}$ de diamètre, on a :

$$R = 0.0027\,\pi \left(\frac{0.119}{2}\right)^2 450^{\frac{5}{2}} = 129^{\text{kil.}}08$$

équivalant à environ 21 fois le poids du boulet.

On voit par là que la résistance de l'air est relativement, beaucoup moins grande pour les gros projectiles que pour les petits.

La résistance dont nous venons de calculer la grandeur en poids, varie à tout moment et diminue avec la vitesse. Cette résistance se transmet à toute la masse du projectile, c'est-à-dire à tous les points matériels dont il est composé. Si donc on divise la résistance de l'air par la masse du projectile, on aura l'action retardatrice sur un point matériel.

Mais dans la valeur de la résistance de l'air $R = 0.0027\pi r^2 v^{\frac{5}{2}}$ il y a un coefficient $0.0027\pi r^2$ qui dépend du projectile et qui est indépendant de la vitesse. C'est sur ce coefficient que doit porter la division.

Or, on sait qu'on a, en appelant P le poids du corps et m sa masse, $P = mg$ et partant $m = \frac{P}{g}$; divisant $0.0027\pi r^2$ par m, on aura : $n = \frac{0.0027\pi r^2 g}{P}$. Or, n est ici une fraction ayant la forme $\frac{1}{k}$ et dans laquelle k est exprimé en mètres.

La valeur de n peut s'écrire ainsi :

$$n = \frac{0.0027 \times 3.14159 \times 4r^2 \times 9^{\text{m}}81}{4 \times P} = \frac{0.0208\,D^2}{P}$$

dans laquelle D est le diamètre du projectile exprimé en fraction de mètre, et P son poids en kilog.

Le nombre n est ce qu'on appelle le coëfficient de la résistance de l'air... en sorte que l'action retardatrice de cette résis-

tance, pendant l'instant infiniment petit dt, est pour un point matériel $dv = -nv^{\frac{2}{3}} dt$.

Quant à la valeur du coefficient 0.0027 on a $0.0027 = \frac{\varphi I \delta}{2g}$. Si δ devenait δ', alors 0.0027 augmenterait ou diminuerait dans le même rapport, et le coefficient deviendrait $\frac{0.0027\ \delta'}{1.208}$.

Nous avons supposé $I = \frac{1}{2}$, $g = 9^{m.}81$, ce qui donne $\varphi = 0.087705$ environ. Pour la balle du fusil on a : $D = 0^{m}.0167$, $P = 0^{kil.}02681$, moyenne d'une pesée de 600 balles. La hauteur ordinaire du baromètre à Paris étant de $76^{cent.}$ on obtient en nombre rond.

$$n = \frac{0.0208 \times 76 \times (0.0167)^2}{0.02681 \times 75} = 0.0002192$$

Pour les autres projectiles on a :

$$0.0208 \times \frac{76}{75} = 0.021077 \text{ et } n = \frac{0.021077\, D^2.}{P}$$

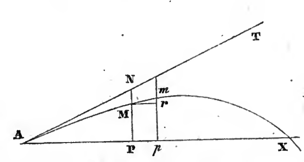
Nous allons donner le tableau des valeurs de n pour les différents projectiles de l'artillerie.

BOULETS DE	DIAMÈTRES.	POIDS.	VALEURS DE n.
		kil.	
24 de terre.	0.1485	12.01	0.0000387
16 —	0.1295	8.02	0.00004407
12 —	0.1183	6.07	0.00004510
8 —	0.1031	4.02	0.0000486
36 côte.	0.1706	17.98	0.00003412
30 —	0.1596	15.07	0.00003503
24 —	0.1474	11.88	0.00003855
18 —	0.1342	8.95	0.00004241
12 —	0.1173	5.97	0.00004858

OBUS DE	DIAMÈTRES.	POIDS.	VALEURS DE n.
22 c. de terre.	0.2202	23.00	0.00004444
16 —	0.1629	11.20	0.00004994
15 —	0.1487	7.70	0.00006053
12 —	0.1184	4.28	0.00006903
22 marine.	0.2202	26.50	0.00003853
16 —	0.1602	10.70	0.00005055
BOMBES DE			
32 centimèt.	0.3206	75.00	0.00002888
27 —	0.2711	50.60	0.00003062
22 —	0.2202	23.00	0.00004444
BALLES sphériques en plomb.			
16 mil. 7	0.0167	0.02681	0.0002192
BALLE allongée pleine en plomb.			
Balle ogivale. — à culot.	0.0172	0.0475	?

CHAPITRE II.

ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE DANS L'AIR.



Soit AP $=x$, PM $=y$, AM $=s$; TAX $=\alpha$, appelons t le temps que le mobile emploie pour parcourir AM, V la vitesse initiale, v la vitesse restante en M; on a $v=\frac{ds}{dt}$... et $v_0=\frac{dx}{dt}$, $v_1=\frac{dy}{dt}$... v_0 et v_1, étant respectivement les composantes horizontales et verticales de cette vitesse.

La diminution de vitesse suivant AM étant $nv^{\frac{5}{2}}dt$; $nv^{\frac{5}{2}}dt$ cos. $mMr=nv^{\frac{5}{2}}dt\,\frac{dx}{ds}$ sera la composante de cette diminution parallèlement à l'axe des x; pareillement $nv^{\frac{2}{5}}dt\,\frac{dy}{ds}$ sera la composante verticale de l'action de la résistance de l'air.

D'après les notations connues, les équations différentielles du mouvement seront :

$$d.\ \frac{dx}{dt} = -nv^{\frac{5}{2}}\frac{dx}{ds}dt \qquad (a)$$

$$d.\ \frac{dy}{dt} = -nv^{\frac{5}{2}}\frac{dy}{ds}dt - gdt\ (b)$$

Supposons dt constant et tirons la valeur de $-\frac{nv^{\frac{5}{2}}dt}{ds}$ de l'équation (a), et substituons-la dans l'équation (b) ; nous aurons :

$$d^2y = \frac{d^2x\,dy}{dx} - gdt^2 \text{ ou } \frac{dxd^2y - dy\,d^2x}{dx} = dx\frac{dxd^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$$

$$= dxd\left(\frac{dy}{dx}\right) = -gdt^2\ (c)$$

équation tout à fait indépendante de l'hypothèse qui a été admise, touchant la loi de la résistance de l'air.

A cause de $v = \frac{ds}{dt}$, l'équation (a) donne $d^2x = -n\frac{ds^{\frac{3}{2}}dx\,dt^2}{dt^{\frac{5}{2}}}$ (d). Soit $\frac{dy}{dx} = z$, il viendra (c) $dx\ dz = -gdt^2$, et comme $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on obtiendra : $ds = dx\sqrt{1 + z^2}$. Substituant dans l'équation (d) on a :

$$d^2x = -\frac{n\,dx^{\frac{5}{2}}}{dt^{\frac{5}{2}}}(1 + z^2)^{\frac{3}{4}}dt^2.$$

Multipliant les deux membres par g et mettant à la place de gdt^2 sa valeur $-dx\,dz$, il vient :

$$\frac{g\,\frac{d^2x}{dx}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\frac{5}{2}}} = n\,dz\,(1 + z^2)^{\frac{3}{4}}\ (e).$$

Développant $(1+z^2)^{\frac{3}{4}}$ par la formule du binôme, on obtient :

$$(1+z^2)^{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{32}z^4 + \frac{5}{128}z^6 - \frac{45\,z^8}{2048}$$
$$+ \frac{117}{8192}z^{10} - \frac{663}{65536}z^{12} + \frac{1989}{262144}z^{14}\dots\dots\dots$$

Substituant dans l'équation, (a) et intégrant on a :

$$\frac{2}{5}g\left(\frac{dt}{dx}\right)^{\frac{5}{2}} = C - nz\left(1 + \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{160}z^4 - \frac{5}{896}z^6\right.$$
$$\left. - \frac{5}{2048}z^8 + \frac{117}{90112}z^{10} - \frac{51}{65536}z^{12} + \frac{1989}{5242880}z^{14}\dots\dots\right)$$

Il est à remarquer que la valeur de la série varie peu pour le tir sous de petits angles. En appelant a la quantité comprise entre parenthèses, on trouve pour $z = o$, $a = 1$, et pour $z = 0.1$ répondant à $\alpha = 5°45$ environ, on a $a = 1.0025\dots$

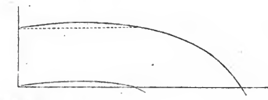
On voit donc qu'on pourra, pour le tir des canons et des obusiers, et à plus forte raison pour celui des armes à feu portatives, supposer a constant et égal à l'unité; surtout lorsqu'on ne considérera, comme on le fait habituellement, qu'un segment de la trajectoire dans lequel les valeurs de z subissent peu de variations.

Pour des angles très-élevés, et surtout pour des trajectoires très-infléchies dans leur branche descendante, il faudra avoir égard à la valeur de a.

Le calcul de la valeur de a par la série $a = 1 + \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{160}z^4 + \frac{5}{896}z^6 - \frac{5}{2048}z^8 \dots\dots$ étant très-pénible et devenant même impossible pour les grands angles, nous don-

nerons tout à l'heure une méthode bien plus facile de la trouver, quelle que soit la valeur de z.

Nous considérerons à l'avenir a comme constant pour une même trajectoire, ou plus exactement pour un même arc de trajectoire, mais pouvant varier d'une trajectoire à une autre et même en général d'un arc à un autre arc de la même courbe ; car on conçoit que l'arc que décrit un boulet de canon, au-dessus d'un sol horizontal très-rapproché, est bien différent de la trajectoire qu'il décrirait s'il était lancé d'une très-grande hauteur (*fig.* 3).



Cela posé, on aura :

$$\frac{2}{5}\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\frac{5}{2}}}=C-naz,\text{ d'où l'on tire }\frac{dx}{dt}=v_0=\frac{\left(\frac{2}{5}g\right)^{\frac{2}{5}}}{(C-naz)^{\frac{2}{5}}}(g).$$

Quant à la vitesse au point M, dans le sens de l'arc, à cause de

$$ds=dx\sqrt{1+z^2}\text{ on trouvera : }v=\frac{\left(\frac{2}{5}g\right)^{\frac{2}{5}}(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(C-naz)^{\frac{2}{5}}}(h).$$

Si l'on appelle ω l'angle dont la tangente est z on aura :

$$\sqrt{1+z^2}=\frac{1}{\cos.\omega}\text{ et }v=\frac{\left(\frac{2}{5}g\right)^{\frac{2}{5}}}{\cos.\omega(C-naz)^{\frac{2}{5}}}(h').$$

Elevant au carré l'équation (g), la multipliant par g et

mettant à la place de gdt^2 sa valeur $-dx\,dz$, il vient :

$$gdx = -\frac{\left(\frac{2}{5}g\right)^{\frac{4}{5}} dz}{(C-naz)^{\frac{4}{5}}};$$

Intégrant, on a :

$$gx = C' + \frac{5}{na}\left(\frac{2g}{5}\right)^{\frac{4}{5}}(C-naz)^{\frac{1}{5}}(i)$$

Elevant à la 5ᵉ puissance, on obtient :

$$C - naz = (gx - C')^5 \frac{n^5a^5}{8og^4}(i).$$

Pour déterminer les constantes C et C′, nous remarquerons que dans l'équation (g) quand $x = o$ on a : $z = tang.\,\alpha, \frac{dx}{dt} = v_o$ $= V\,cos.\,\alpha$, il viendra donc :

$$C = na\,tang.\,\alpha + \frac{2}{5}\frac{g}{(V\,cos.\,\alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Pareillement l'équation (i) donnera :

$$C' = -\frac{2g}{na(V\,cos.\,\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

On obtiendra donc :

$$C - naz = \left(x + \frac{2}{na\sqrt{V\,cos.\,\alpha}}\right)^5 \frac{g a^5 n^5}{80}$$
$$= \left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{\sqrt{V\,cos\,\alpha}}\right)^5 \frac{2g}{5}(k).$$

Substituant dans l'équation (g), on trouve :

$$\frac{dx}{dt}=v_0=\frac{1}{\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^2}=\frac{V\cos.\alpha}{\left(1+\frac{nax\sqrt{V\cos.\alpha}}{2}\right)^2} \quad (l)$$

$$\frac{ds}{dt}=v=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^2} \quad (m)$$

$$\frac{dy}{dt}=v_1=\frac{z}{\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos\alpha}}\right)^2} \quad (l')$$

L'équation (k) donne en y mettant au lieu de C sa valeur

$$z=tang.\alpha+\frac{2g}{5na\,(V\cos.\alpha)^{\frac{5}{2}}}-\frac{2g}{5na}\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^5 (n)$$

ou à cause de : $\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{v_0}}$; $z=tang.\alpha+$

$$\frac{2g}{5na}\left(\frac{1}{(V\cos.\alpha)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{v_0^{\frac{5}{2}}}\right)\ldots (n').$$

La formule (n) est précieuse en ce qu'elle permet de calculer très-facilement l'abcisse répondant à une inclinaison donnée de la trajectoire, et réciproquement.

On trouve également l'abcisse du point de la branche descendante, où l'inclinaison est égale à l'angle de projection en substituant à la place de z sa valeur — $tang.\ \alpha$.

La vitesse au même point est évidemment :

$$v=\frac{\sqrt{1+tang.^2\alpha}}{\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^2}=\frac{1}{\cos.\alpha\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^2}$$

$$=\frac{V}{(nax\sqrt{V\cos.\alpha}+1)^2}$$

Au delà de ce point on substitue à z des valeurs plus grandes que $-$ *tang.* α; on peut calculer la valeur de a et celle de l'abcisse correspondante. Dans ce qui va suivre nous ferons pour simplifier, V *cos.* $\alpha =$ Vo.

L'abcisse x est donnée par la formule

$$x = \frac{2}{na}\left[\left(\frac{5na}{g}(tang.\,\alpha - z)\frac{1}{V_0^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right] (p).$$

L'équation (n)

$$z = \frac{dy}{dx} = tang.\,\alpha + \frac{2g}{5\,na\,V_0^{\frac{5}{2}}} - \frac{2g}{5na}\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^5$$

étant intégrée devient :

$$y = x\,tang.\,\alpha + \frac{2gx}{5na\,V_0^{\frac{5}{2}}} - \frac{2g}{15\,n^2a^2}\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^6 + C'''.$$

A l'origine $x = o$, $y = o$ et $C''' = \dfrac{2g}{15\,n^2a^2}\,\dfrac{1}{V_0^{\,3}}$, en sorte que l'équation de la trajectoire devient :

$$y = x\,tang.\,\alpha + \frac{2gx}{5\,naV_0^{\frac{5}{2}}} - \frac{2g}{15n^2a^2}\left[\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^6 - \frac{1}{V_0^{\,3}}\right] (q).$$

L'équation q peut être présentée sous la forme

$$y = x\,tang.\,\alpha + \frac{2gx}{5na\,V_0^{\frac{5}{2}}} - \frac{2g}{15n^2a^2}\left(\frac{1}{v_0^{\,3}} - \frac{1}{V_0^{\,3}}\right) q'.$$

En faisant $y = o$ dans l'équation (q), on a $x = o$, et une équation du 5e degré dont la racine réelle et positive est la portée réelle cherchée.

L'équation (q'), lorsqu'on y suppose $y = o$, donne $x\,tang.\,\alpha +$ $\dfrac{2gx}{5na\,V_0^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{2g}{15^2na^2}\left(\dfrac{1}{v_0^{\,3}} - \dfrac{1}{V_0^{\,3}}\right)\left(q''\right)$, qui permet de calculer

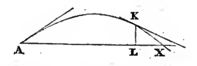
l'abcisse répondant à une valeur donnée de v_0, formule très-précieuse pour le tir sous de petits angles.

Pour trouver la portée, on donne à z des valeurs plus grandes que *tang.* α, on calcule l'abcisse correspondante, et substituant les valeurs de x ainsi obtenues, dans l'équation de la trajectoire, de manière à obtenir au moins une ordonnée positive et une ordonnée négative; et on pourra, si ces ordonnées sont assez petites, trouver la portée par une simple proportion.

Lorsque l'ordonnée du point de la branche descendante, pour lequel on a $z = -tang.\,\alpha$ n'est pas trop grande, on peut calculer la portée entière d'une manière très-simple.

Soit b l'ordonnée dont il s'agit, l'angle de projection a pour tangente. — *tang.* α la valeur $\dfrac{V}{\left(\dfrac{nax}{2} V_0^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2} = V\alpha$ peut être considéré comme vitesse initiale, et en transportant l'origine des coordonnées au pied de l'ordonnée KL, on a $b = y + x' tang.\,\alpha + \dfrac{gx'^2}{2(V\alpha)^2 cos^2\alpha}$

Au point où l'arc parabolique rencontre l'axe des abcisses on a



$y = o$ et $b = x' tang.\,\alpha + \dfrac{gx'^2}{2(V\alpha)^2 cos^2\alpha}$, équation qui permettra de calculer la valeur de x', et en désignant AL par $x\alpha$, on aura $x = x\alpha + x'$.

Si cette première valeur n'était pas suffisamment exacte, on la substituerait en nombre dans l'équation :

$$o = x tang.\,\alpha + \frac{2gx}{5na\,V_0^{\frac{3}{2}}} - \frac{2g}{15n^2a^2}\left[\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^6 - \frac{1}{V_0^{3}}\right]$$

et dans les termes affectés de la première puissance seulement. On conçoit que comme il faudra, pour résoudre l'équation, extraire une racine sixième, l'erreur qu'on aurait pu commettre dans la détermination provisoire de x, serait sans effet notable sur la véritable grandeur de cette abcisse.

Dans le tir sous de petits angles, on pourra substituer à x' $\frac{b}{tang\alpha}$.

Cherchons maintenant la durée du mouvement ; on a (l) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^2} \text{ et}$$

$dt = dx\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, dont l'intégrale est $t = C^{IV} + \frac{2}{3na}\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^3$. A l'origine, on a $x = o$ $t = o$, et partant $C^{IV} = -\frac{2}{3naV_0^{\frac{3}{2}}}$, en sorte que l'on obtient $t = \frac{2}{3na}\left[\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^3 - \frac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}}\right]$ (r) ou encore : $t = \frac{2}{3na}\left(\frac{1}{v_0^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}}\right)$ (r').

Le formule (n) permet de calculer les coordonnées du point le plus élevé de la trajectoire; il suffit de supposer dans cette équation $z = o$, et l'on trouve :

$$o = tang.\,\alpha + \frac{2g}{5naV_0^{\frac{5}{2}}} - \frac{2g}{5na}\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^5,$$ d'où l'on tire :

$$x = \frac{2}{na}\left[\left(\frac{5na\,tang\alpha}{2g} + \frac{1}{V_0^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right] \; (s).$$ C'est l'abcisse du point culminant de la courbe, substituant cette valeur dans l'équation de la trajectoire, on obtiendra l'ordonnée de ce point. On simplifiera l'opération en substituant à la place de $\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}$ sa valeur $\left(\frac{5na\,tang.\,\alpha}{2g} + \frac{1}{V_0^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}}$.

La vitesse horizontale au sommet de la courbe sera $V_0 = \frac{1}{\left(\frac{5na\,tang\alpha}{2g} + \frac{1}{V_0^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{2}{5}}}$ (*t*).

Il est à remarquer que la valeur de *s*, qui est intégrable directement, dans le cas de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, ne l'est point ici.

En effet, on a $ds = dx\sqrt{1+z^2}$; mais nous avons trouvé, page 27, $dx = \frac{-\left(\frac{2}{5}g\right)^{\frac{5}{4}}dz}{g(C-naz)^{\frac{5}{4}}}$ substituant dans la valeur de *ds*, on obtient $ds = -\frac{\left(\frac{2g}{5}\right)^{\frac{4}{5}}dz\sqrt{1+z^2}}{g(C-naz)^{\frac{4}{5}}}$, formule qui n'est intégrable que par les séries.

Si l'arc que l'on considère était assez petit pour être supposé sensiblement en ligne droite, de telle sorte qu'on pût poser $ds = bdx$; ici x est la projection de l'arc *s*, et l'on a $b =$

$\frac{1}{\cos i}$, i étant l'inclinaison moyenne entre celles des deux extrémités de l'arc, on aurait $s = bx = \frac{x}{\cos . i}$.

Cherchons le rapport de l'arc à sa projection. Il est évident que si à chaque instant la résistance de l'air cessait d'avoir lieu, le mobile décrirait une parabole ; or, la vitesse pouvant être considérée comme constante au commencement de chaque élément infiniment petit, il en résulte que la trajectoire peut être considérée comme composée d'une infinité d'éléments paraboliques, dont les paramètres varient à tout moment par l'effet de la résistance de l'air.

$$\text{Soit } y = x \, tang . i - \frac{gx^2}{2V_{\prime}^2 \cos .^2 i.}$$

l'équation qui convient à un élément parabolique ; l'origine étant transportée au commencement de cet élément, i étant l'angle de projection et $V_{\prime}$ la vitesse initiale, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = z = tang . i - \frac{gx}{V_{\prime}^2 \cos .^2 i}; \text{ mais } ds = bdx = dx \sqrt{1 + z^2}.$$

Or, on a dans la parabole $dz = -\frac{gdx}{V_{\prime}^2 \cos .^2 i}$, partant

$$dx = -\frac{V_{\prime}^2 \cos .^2 i}{g} dz \text{ et } ds = -\frac{V_{\prime}^2 \cos .^2 i}{g} dz \sqrt{1 + z^2}.$$

$$\text{Intégrant on a : } s = -\frac{V_{\prime}^2 \cos .^2 i}{g} \int dz \sqrt{1 + z^2},$$

Mais l'équation $z = tang . i - \frac{gx}{V_{\prime}^2 \cos .^2 i}$ donne $x = (tang . i - z) \frac{V_{\prime}^2 \cos .^2}{g}$ on a donc $\frac{s}{x} = -\frac{\int dz \sqrt{1 + z^2}}{tang . i - z} = b$.

Tant qu'on ne considère qu'un élément infiniment petit, l'arc de parabole coïncide avec l'arc correspondant de la tra-

jectoire, mais, à mesure que les arcs augmentent, la coïncidence devient moins parfaite.

On arrive à une exactitude suffisante pour la pratique, en substituant à l'arc de la trajectoire celui de la parabole dont les tangentes extrêmes sont les mêmes.

On a $\int dz\sqrt{1+z^2}=\frac{1}{2}\left(z\sqrt{1+z^2}+log\cdot\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right)+c.$

A l'origine $z=tang.\ \alpha$, et l'on obtient :$-\int dz\sqrt{1+z^2}=\frac{1}{2}$ $\Big[tang.\ \alpha\ \sqrt{1+tang.^2\alpha}\ +\ log.\left(tang.\ \alpha+\sqrt{1+tang.^2\alpha}\right)$ $-z\sqrt{1+z^2}-log.\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\Big].$

Si l'on prend l'intégrale depuis le point de projection jusqu'au sommet de la trajectoire où $z=0$, on obtient $b_0=\frac{1}{2}\sqrt{1+tang.^2\alpha}+\frac{1}{2\,tang.\ \alpha}log.\left(tang.\ \alpha+\sqrt{1+tang.^2\alpha}\right).$

Quant à la valeur générale de b, on a $b=$

$$b=\frac{1}{2\,(tang.\ i-z}\Big[\left(tang.\ i\ \sqrt{1+tang.^2 i}+log.\left(tang.\ i+\sqrt{1+tang.^2 i}\right)-z\sqrt{1+z^2}-log z+\sqrt{1+z^2}\right).\Big]$$

Pour les trajectoires très-aplaties, la valeur de z varie entre des limites très-resserrées, et l'on arrive à des résultats très-rapprochés de la vérité en employant la formule b_0. Pareillement pour le tir des bombes, dans les limites des portées ordinaires, les deux branches de la trajectoire ne sont pas assez dissemblables pour que l'emploi de la valeur de b_0 produise des erreurs sensibles dans la pratique.

La quantité que nous avons appelée a, dans notre formule,

étant d'un calcul plus difficile que celui de la quantité b_0 voyons, s'il ne serait pas possible de les rattacher l'une à l'autre.

A cet effet, nous allons établir les équations du mouvement dans l'hypothèse de $ds = bdx$.

L'équation (a) devient alors

$$\frac{d.dx}{dt} = -\frac{nb^{\frac{5}{2}} dx^{\frac{5}{2}} dx dt}{dt^{\frac{5}{2}} b\, dx} = -\frac{nb^{\frac{3}{2}} dx^{\frac{5}{2}} dt}{dt^{\frac{5}{2}}},$$

d'où l'on tire : $\dfrac{\frac{d.dx}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\frac{5}{2}}} = -nb^{\frac{3}{2}} dt$

Or, b étant supposé constant dans le segment de la trajectoire que l'on considère, on a en intégrant $\dfrac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\frac{3}{2}}} = C_{,} + \dfrac{2}{3} nb^{\frac{3}{2}} t,$

à l'origine $t = o$, $\dfrac{dx}{dt} = V_0$, il viendra donc :

$\dfrac{1}{v_0^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{2} b^{\frac{3}{2}} nt$ (A), on a $V_0 = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2} b^{\frac{3}{2}} nt + \frac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}}$

$$\text{et } dx = \frac{dt}{\left(\frac{3}{2} b^{\frac{3}{2}} nt + \frac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

dont l'intégrale est :

$x = C_{,,} + \dfrac{2}{nb^{\frac{3}{2}}} \left(\dfrac{3}{2} b^{\frac{3}{2}} nt + \dfrac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}$ à l'origine $x = o$, $t = o$ et $C_{,,}$

$= \dfrac{2}{nb^{\frac{3}{2}}} \dfrac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}$ et partant $x = \dfrac{2}{nb^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\dfrac{3}{2} b^{\frac{3}{2}} nt - \dfrac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^3 - \dfrac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}} \right]$

d'où l'on tire :

$$t = \frac{2}{3nb^{\frac{3}{2}}}\left[\left(\frac{nb^{\frac{3}{2}}x}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{1}{2}}}\right)^3 - \frac{1}{V_0^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Comparant cette équation à l'équation (r) que nous avons trouvée précédemment, on voit qu'elles sont identiquement les mêmes; lorsqu'on remplace $b^{\frac{3}{2}}$ par a, on a donc $a = b^{\frac{3}{2}}$; et dans le cas où, comme Besout et d'Obeinheim, on se contente de la moyenne $b_0 \ldots a_0 = b_0^{\frac{3}{2}}$.

On passera de la table donnée par Besout à la fin de son 4e volume (*artillerie*), à celle des valeurs de α_0 en élevant à la puissance $\frac{3}{2}$ tous les nombres donnés par cet auteur. (Voir à la fin du chapitre la table des valeurs de b_0 appelés a par Besout et celle des valeurs de α_0 de notre formule.)

Lorsque le tir doit avoir lieu sous de petits angles, et même sous l'angle de 10°, l'emploi d'une valeur unique de a donnera des résultats peu différents de ceux qu'on obtiendrait en divisant l'arc en deux de 5°. Ainsi de 10 à 5° on trouve $b = 1.00898$, de 5 à 0° $b = 1.00127$ dont la moyenne est 1.00512, au lieu de $b_0 = 1.00516$ ou $b^{\frac{3}{2}} = a = 1.00769$, au lieu de $a = 1.00775$ différence à peine sensible.

L'emploi d'une valeur unique de a donne donc une quantité trop forte, et à cause de $s = a^{\frac{3}{2}} x$ on voit que les deux branches de la trajectoire seront trop étendues. Jusqu'au point de la branche descendante où l'inclinaison est égale à l'angle de projection, mais au delà, la valeur de z devenant de plus en plus grande, la quantité a devient trop petite et la portée se trouve diminuée.

Il résulte de là, que quand le tir doit avoir lieu sous de petits angles, la valeur de a subit si peu de variations qu'il est inutile d'y avoir égard, et que quand le tir a lieu sous de grands angles, il s'opère dans les deux branches de la courbe

des compensations qui permettent de supposer a constant pendant tout le trajet.

Pour construire graphiquement la trajectoire, on supposera cette courbe partagée en un certain nombre d'arcs, d'un certain nombre de degrés ; ainsi, par exemple, l'angle de tir étant de 45° on pourra supposer les arcs de 5°.

Au moyen de la table 3. on calculera la valeur de b pour l'arc de 45 à 40°, et on en déduira celle $a = b^{\frac{3}{2}}$.

Connaissant a et z qui est ici *tang*. 40° on calculera l'abcisse x à l'aide de la formule (n) puis celle de y à l'aide de l'équation (q) de la trajectoire.

On pourra donc obtenir autant d'abcisses et d'ordonnées qu'on voudra, et construire ainsi la trajectoire par points. Le point où la courbe coupera l'axe des x donnera la portée.

Pour plus d'exactitude, et pour faciliter les calculs, on transportera successivement l'origine des coordonnées aux divers points de division, on calculera la vitesse restante pour $z = tang.$ 40°, et cette vitesse deviendra vitesse initiale pour l'arc suivant, et l'angle de projection serait alors de 40°.... On obtiendra ainsi une suite d'abcisses et d'ordonnées... x_0 $x_{,} x_{,,} x_{,,,}$ $y_0\, y_{,}\, y_{,,}\, y_{,,,}\ldots$ et l'on aura $x = x_0 + x_{,} + x_{,,} + x_{,,,}$ etc... $y = y_0 + y_{,} + \ldots\ldots y_{,,} - y_{,,,} - \ldots\ldots$

En supposant dx constant, l'expression du rayon de courbure de la trajectoire est :

$$\rho = -\frac{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dz}{dx}}, \text{ mais on a par } dx = \frac{\left(\frac{2g}{5}\right)^{\frac{4}{5}} dz}{(C - naz)^{\frac{4}{5}}}; \text{substituant}$$

$$\text{on obtient } \rho = -\frac{(1+z^2)\ (C - naz)^{\frac{4}{5}}}{\left(\frac{2g}{5}\right)^{\frac{4}{5}}}\ (u)$$

et en mettant à la place de C sa valeur il vient :

$$\rho = -(1+z^2)^{\frac{3}{2}}\left(na\ tang.\ \alpha - \frac{2g}{5\,V_0^{\frac{5}{2}}} - naz\right)^{\frac{4}{5}}(v).$$

$$\rho = -(1+z^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{V_0^{\frac{5}{2}}}\right)^{4}(v')\ \rho = -\frac{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{V_0^{2}}.$$

A l'origine $\rho = -\frac{(1+tang.^2\alpha)}{V_0^2}$; au sommet de la courbe $\rho = -\frac{1}{U_0^2}$; Au point. où l'on a $z = -\ tang.\ \alpha$....

$$\rho = -(1+tang.^2\alpha)^{\frac{3}{2}} \times \left(2na\ tang.\ \alpha - \frac{2g}{5V_0^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{4}{5}} \ldots$$

La formule (n) donne le moyen de trouver une expression qui contient l'angle de plus grande portée, dans le cas d'un angle de chute égal à l'angle de projection.

Comme l'angle de plus grande portée varie avec la vitesse et la nature du projectile, il n'y aura pas d'autre moyen pour le déterminer, que de construire une série de trajectoires pour un même projectile lancé avec la même vitesse, et sous différentes inclinaisons.

La supposition de $V = \infty$ donne évidemment les limites extrêmes des portées qu'on peut obtenir avec un projectile donné.

L'équation de la trajectoire devient dans ce cas:

$$y = x\ tang.\ \alpha - \frac{2g\,n^4\,a^4\,x^6}{15.\ \ 2^6}.$$

Pour $y = o$ on a $tang.\ \alpha = \frac{gn^4\,a^4\,x^5}{15\ \ 2^5}$ et $x = 2\sqrt[5]{\frac{15\ tang.\ \alpha}{gn^4\ a^4}}$.

Pareillement on a : $z = tang.\ \alpha - \frac{2g\,n^4\,a^4\,x^5}{5.\ 2^5}$, et à cause de $\frac{gn^4\,a^4x^5}{2^5} = 15\ tang.\ \alpha$, $z = tang\,\alpha - 6\ tang.\ \alpha = -5\,tang.\ \alpha$.

valeur qui permettra de calculer a et partant la valeur de x, qui sera la limite extrême de la portée à laquelle pourra atteindre un projectile donné, pour un angle de tir connu, puisqu'il n'est pas possible que la vitesse soit jamais infinie.

La formule $x=2\sqrt[5]{\frac{15\,tang.\alpha}{gn^4a^4}}$ montre qu'il y a un angle de plus grande portée qu'on ne peut obtenir que par des tâtonnements successifs.

Pour $\alpha=o$, $x=o$ et $a=1$, à mesure que α augmente, la portée augmente; mais a croissant en fonction de *tang.* α et étant à la 4e puissance, la valeur de x décroît assez rapidement, et c'est à peu près pour $\alpha=11°\frac{1}{2}$ que x est à son maximum.

La formule $x=2\sqrt[5]{\frac{15\,tang.\alpha}{gn^4a^4}}$ montre qu'il y a, pour chaque espèce de projectile et pour une inclinaison donnée, une limite qu'il n'est pas possible de franchir ; quelle que soit la grandeur de la charge employée et la force de la poudre.

Examinons maintenant si en développant le binôme dans les valeurs de y, de z et de t, on n'arriverait pas à quelques simplifications utiles.

Les équations que nous avons trouvées précédemment sont :

$$y=x\,tang.\alpha+\frac{2gx}{5na(\sqrt{\cos.\alpha})^{\frac{5}{2}}}-\frac{2g}{15n^2a^2}\left[\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\cos.\alpha}}}\right)^6-\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^3\alpha}}\right]$$

$$z=tang.\alpha+\frac{2g}{5na(\sqrt{\cos.\alpha})^{\frac{5}{2}}}-\frac{2g}{5na}\left[\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\cos.\alpha}}}\right]^5$$

$$v=\frac{1}{\cos.\omega}\,\frac{1}{\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\cos.\alpha}}}\right)^5}$$

$$t=\frac{2}{3na}\left[\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\cos.\alpha}}}\right)^3-\frac{1}{(\sqrt{\cos.\alpha})^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Effectuant les multiplications et réductions, on trouve :

$$(A)\ y = x\ tang.\,\alpha - \frac{gx^2}{2\,V^2 cos.^2\alpha}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{nax}{3}\sqrt{V\,cos.\,\alpha} + \frac{n^2a^2x^2V\,cos.\,\alpha}{4} \\ + \frac{n^3a^3x^3(V\,cos.\,\alpha)^{\frac{3}{2}}}{20} + \frac{n^4n^4x^4V^2cos.^2\alpha}{240} \end{array}\right.$$

$$(B)\ z = tang.\,\alpha - \frac{gx}{V^2\,cos.^2\,\alpha}\left\{\begin{array}{l} 1 + nax\sqrt{V\,cos.\,\alpha} + \frac{n^2a^2x^2V\,cos.\,\alpha}{2} \\ + \frac{n^3a^3x^3(V\,cos.\,\alpha)^{\frac{3}{2}}}{8} + \frac{n^4a^4x^4V^2cos.^2\alpha}{80} \end{array}\right.$$

$$(C)\ v = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{\sqrt{V\,cos.\,\alpha}}\right)^2} = \frac{V\,cos.\,\alpha}{cos.\,\omega}\,\frac{1}{\left(\frac{nax}{2}\sqrt{V\,cos.\,\alpha}+1\right)^2}$$

$$(D)\ t = \ldots\ \frac{x}{V\,cos.\,\alpha}\left(1 + \frac{nax}{2}\sqrt{V\,cos.\,\alpha} + \frac{n^2a^2x^2V\,cos.\,\alpha}{12}\right)$$

Et si l'on appelle Y, Y', U, T les fonctions comprises entre parenthèses, il viendra :

$$y = x\,tang.\,\alpha - \frac{gx^2}{2V^2cos.^2\alpha}\ Y\ (I).$$

$$z = tang.\,\alpha - \frac{gx}{V^2cos.^2\alpha}\ Y'\ (II).$$

$$v = \frac{V\,cos.\,\alpha}{U\,cos.\,\omega}\ (III);\ t = \frac{x}{V\,cos.\,\alpha}\ T\ (IV).$$

équations quise rapportent à celles du mouvement parabolique modifié par la résistance de l'air.

Cela posé, nous remarquerons que les fonctions Y Y' U et T se réduisent à l'unité quand on suppose que $n = o$, ou que le mouvement a lieu dans le vide. Dans ce cas, les équations I, II, III et IV sont exactement celles qui conviennent au mouvement parabolique, ce qui doit être.

Nous observerons en outre, que, la quantité n est une fraction qui peut être représentée par $\frac{1}{c}$, c étant exprimé en mè-

tres, ou en général, en fonction de l'unité de mesure dont on fait usage, Il en résulte que les quantités nax, $n^2a^2x^2$... etc., ont réellement la forme $\frac{ax}{c}$, $\frac{a^2x^2}{c^2}$... et qu'on peut les considérer comme des nombres abstraits, indépendants de l'unité de mesure et de l'espèce de projectile dont on fait usage. Ainsi la valeur $\frac{ax}{c} = nax$ étant donnée, on pourra, en faisant varier convenablement les distances et les projectiles, avoir $nax = n'a'x' = n''a''x'' = n'''a'''x'''$ ...... Quant aux angles de tir et aux vitesses initiales, il faudra qu'on ait en même temps $V cos. \alpha = V' cos. \alpha' = V'' cos. \alpha'' = V''' cos. \alpha'''$......

Il résulte de là que les fonctions Y, Y', U et T ont un caractère de généralité qui les rend applicables à tous les calibres, et qu'il est possible d'en dresser des tables présentant les calculs tout faits, des quantités Y, Y', U et T pour des valeurs de nax et de $V\ cos. \alpha$ suffisamment rapprochées les unes des autres. Ces tables, à double entrée, comme celles de multiplication, présentent à l'intersection des deux colonnes, horizontale et verticale, la fonction qui correspond aux deux arguments qui ont servi à y entrer, de la même manière que, dans une table de multiplication, le produit qu'on cherche, se trouve à l'intersection des deux colonnes qui renferment les facteurs donnés.

Mais on conçoit qu'il ne serait pas possible de rédiger des tables assez étendues pour présenter toutes les valeurs imaginables de nax et de $V\ cos. \alpha$. Il devient donc nécessaire d'intercaler entre les données des tables les valeurs intermédiaires dont on peut avoir besoin; cette intercalation se fait par de simples proportions, et d'une manière tout à fait analogue à ce qui se pratique pour les tables de logarithmes.

L'idée de ces tables, qui est sans contredit une fort belle

chose, appartient à notre savant et modeste camarade Didion; les tables qu'on déduirait de nos formules coïncidant, presque complétement, avec celles de M. Didion, nous renverrons provisoirement le lecteur au traité de balistique de cet auteur.

On sait combien la théorie du mouvement parabolique avait jeté de profondes racines chez les anciens artilleurs. On sentait alors comme aujourd'hui, tout l'avantage que des formules d'un calcul facile pourraient procurer pour établir les règles du tir des armes à feu. Les formules précédentes et les tables de M. Didion répondent à ce besoin de la pratique, et un officier peut facilement écrire les formules du mouvement dans l'air, du moment où il se rappelle celles du mouvement dans le vide.

Pour passer d'une bouche à feu à une autre, on posera d'abord :

$$y = x\,tang.\,\alpha - \frac{gx^2}{2\,V^2\,cos.^2\,\alpha}\,Y...$$

Pour un autre projectile lancé sous un autre angle on aurait :

$$y' = x'\,tang.\,\alpha' - \frac{gx'^2}{2\,V'^2\,cos.^2\,\alpha'}\,Y'...$$

Or, si nous admettons qu'on ait $nax = n'a'x'$ et $V\,cos.\,\alpha = V'\,cos.\,\alpha'$, nous aurons $Y = Y'$ et :

$\frac{x\,tang.\,\alpha - y}{x'\,tang.\,\alpha' - y'} = \frac{x^2}{x'^2}$, formules qui avec $nax = n'a'x'$ et $V\,cos.\,\alpha = V'\,cos.\,\alpha'$, établiront la concordance entre le tir des deux projectiles.

Si l'on avait $y = o$ et $y' = o$... il viendrait $\frac{tang.\,\alpha}{tang.\,\alpha'} = \frac{x}{x'} = \frac{n'a'}{na}$. Dans le tir sous de petits angles on a $a = a' = 1$ et sensiblement $cos.\,\alpha = cos.\,\alpha' = 1$, et partant $\frac{tang.\,\alpha}{tang.\,\alpha'} = \frac{n'}{n}$.

La formule $v_0 = \frac{1}{\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^2}$ fait voir que les vitesses restantes des projectiles, aux distances x et x', sont les mêmes dans ce cas.

L'accord de cette formule avec les résultats de l'expérience n'est pas aussi parfait qu'on pourrait l'espérer, à moins que les tables de tir de l'artillerie ne soient très-défectueuses, ce qui n'est pas présumable. Toutefois nous proposerons, dans le chapitre 4, un moyen pour établir la concordance entre la théorie et la pratique.

Si les formules précédentes laissent encore à désirer pour passer d'un calibre à un autre, elles sont très-précieuses pour calculer tout ce qui est relatif à un projectile donné, du moment où l'on a deux, ou même une seule expérience bien faite, pour servir de point de départ, ce qui a presque toujours lieu dans les expériences de balistique.

Nous terminerons ce chapitre par les tableaux des valeurs que nous avons appelées a, b, a_0, b_0.....

Tableau des valeurs de b *et de* a *pour des arcs de différentes grandeurs.*

	b.		*a.*	
Arcs de 5°.	75 à 70	3.39164	75 à 70	6.24649
	70 à 65	2.64322	70 à 65	4.29733
	65 à 60	218221	65 à 60	3.22364
	60 à 55	1.87047	.	2.55834
	55 à 50	1.64854	.	2.11664
	50 à 45	1.48403	.	1.80786
	45 à 40	1.35895	.	1.58418
	40 à 35	1.26229	.	1.46804
	35 à 30	1.18698	.	1.29320

		b.		*a.*
Arcs de 5°.	30 à 25	1.12832	30 à 25	1.19853
	25 à 20	1.08309	.	1.12719
	20 à 15	1.04904	.	1.07445
	15 à 10	1.02470	.	1.03728
	10 à 5	1.00898	.	1.01349
	5 à 0	1.00127	.	1.00194
Arcs de 10°.	80 à 70	4.33124	80 à 70	9.01400
	70 à 60	2.45597	.	3.84889
	60 à 50	1.77304	.	2.36089
	50 à 40	1.42781	.	1.70640
	40 à 30	1.22694	.	1.35905
	30 à 20	1.10663	.	1.16414
	20 à 10	1.03718	.	1.05628
	10 à 0	1.00516	.	1.00775
Arcs de 15°.	75 à 60	2.91662	75 à 60	4.98103
	60 à 45	1.69734	.	2.78325
	45 à 30	1.27720	.	1.44340
	30 à 15	1.08873	.	1.13604
	15 à 0	1.08171	.	1.04782

Tableau des valeurs de a_0.

degrés.		degrés.		degrés.	
0	1.00000	15	1.01781	30	1.08063
1	1.00007	16	1.02038	31	1.08712
2	1.00030	17	1.02314	32	1.09395
3	1.00068	18	1.02609	33	1.09744
4	1.00121	19	1.02927	34	1.10889
5	1.00194	20	1.03265	35	1.11633
6	1.00276	21	1.03628		
7	1.00376	22	1.04012	36	1.12558
8	1.00493	23	1.04421	37	1.13466
9	1.00628	24	1.04856	38	1.14466
10	1.00773	25	1.05281	39	1.15371
11	1.00940	26	1.05806	40	1.16519
12	1.01124	27	1.06323	41	1.17661
13	1.01324	28	1.06871	42	1.18871
14	1.01558	29	1.07450	43	1.20159

degrés.		degrés		degrés.	
44	1.21518	60	1.62143	76	3.55265
45	1.22965	61	1.66745	77	3.89001
46	1.24519	62	1.71773	78	4.29992
47	1.26153	63	1.77290	79	4.80599
48	1.27897	64	1.83357	80	5.44270
49	1.29776	65	1.90054	81	6.26248
50	1.31761	66	1.97477	82	7.34800
51	1.33898	67	2.05732	83	8.83687
52	1.36185	68	2.14963	84	10.97410
53	1.38613	69	2.25324	85	14.23580
54	1.41272	70	2.37025	86	19.66305
55	1.44177	71	2.50312	87	31.47209
56	1.47165	72	2.65502	88	54.63013
57	1.50469	73	2.82993	89	153.68621
58	1.54045	74	3.03300	90	(infini)
59	1.57922	75	3.27088	89 59′	71264.75

Tableau des valeurs de b_0.

degrés.		degrés.		degrés.	
0	1.00000	20	1.02165	40	1.10730
1	1.00005	21	1.02404	41	1.11452
2	1.00020	22	1.02657	42	1.12215
3	1.00045	23	1.02926	43	1.13022
4	1.00081	24	1.03212	44	1.13875
5	1.00127	25	1.03514	45	1.14777
6	1.00184	26	1.03834	46	1.15741
7	1.00251	27	1.04172	47	1.16752
8	1.00328	28	1.04530	48	1.17826
9	1.00417	29	1.04907	49	1.18973
10	1.00516	30	1.05306	50	1.20189
11	1.00626	31	1.05727	51	1.21483
12	1.00748	32	1.06171	52	1.22862
13	1.00881	33	1.06640	53	1.24333
14	1.01036	34	1.07134	54	1.25903
15	1.01184	35	1.07596	55	1.27583
16	1.01354	36	1.08206	56	1.29381
17	1.01536	37	1.08787	57	1.31310
18	1.01732	38	1.09400	58	1.33382
19	1.01942	39	1.10004	59	1.35612

degrés.		degrés.		degrés.	
60	1.38047	71	1.84355	82	3.77960
61	1.40616	72	1.91740	83	4.27430
62	1.43429	73	2.00071	84	4.93833
63	1.46484	74	2.09531	85	5.87383
64	1.49807	75	2.20349	86	7.28508
65	1.53433	76	2.32824	87	9.90478
66	1.57402	77	2.47344	88	14.39751
67	1.61759	78	2.64428	89	28.09136
68	1.66562	79	2.84788	90	± infini.
69	1.71872	80	3.09418		
70	1.77772	81	3.39753		

Tang. 99° 59′ = 3437.74600

b_o = 1718.87224

CHAPITRE III.

APPLICATION DES FORMULES AUX RÉSULTATS DE L'EXPÉRIENCE.

Les premières expériences sérieuses de balistique sont celles que Hutton a faites à l'aide du pendule pour calculer les lois de la résistance de l'air.

Dans ces expériences on a déterminé la vitesse initiale du mobile pour une charge donnée, puis on a tiré sur le pendule balistique avec cette charge, à un certain nombre de distances, en prenant tous les soins possibles pour que les vitesses initiales fussent les mêmes à chaque coup. La vitesse accusée par le pendule pour chaque distance, comparée à la vitesse initiale et à cette même distance, permettait de calculer les lois de la diminution de vitesse produite par la résistance du milieu, suivant l'étendue du trajet.

Mais comme les circonstances du tir ne pouvaient être les mêmes à chaque coup, on tirait un certain nombre de fois à chaque distance, et on prenait ensuite la moyenne des indications du pendule, tant pour la détermination de la vitesse initiale, que pour celle des autres vitesses.

La nécessité de soustraire le pendule à l'action des gaz de la poudre oblige à placer le pendule à une distance de 10 à

15^m du canon, et à prendre pour vitesse initiale celle donnée par le pendule pour la distance la plus rapprochée : on peut ensuite conclure la vitesse du mobile à la sortie de la bouche du canon, à l'aide des lois observées.

L'incertitude du tir ne permettant pas de tirer à des distances très-grandes, on a fait varier les charges. On conçoit que s'il eût été possible de faire la 2e série d'expériences avec une charge qui donnât une vitesse initiale égale à la plus petite de celles trouvées à l'aide du pendule, pour la plus grande distance, on aurait eu à la fin de la 2e série d'expériences les lois de la résistance de l'air pour une distance double ; agissant de même pour les 3e, 4e, 5e séries, on pourrait prolonger le tir pour les plus grandes distances, et déterminer ainsi les lois de la résistance de l'air dans des limites très-étendues.

Les expériences de Hutton ont été précisément dirigées dans ce sens, il y a effectivement entre chaque série d'expériences des vitesses identiques, ou à peu près identiques, qui permettent de passer d'une distance à une autre et d'avoir ainsi, les lois de la résistance de l'air entre des limites assez éloignées.

Dans tous les calculs faits par cet auteur on suppose que le projectile vient frapper perpendiculairement à la surface du pendule ; on conçoit qu'il n'en est point ainsi, et que plus la distance du tir augmente plus la trajectoire s'infléchit. Cette inflexion, peu considérable pour les grandes vitesses, devient sensible pour les petites et les grandes distances.

Nous allons appliquer la formule (l) $v_0 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{nax}{2} + \dfrac{1}{V\sqrt{\cos.\alpha}}\right)^2}$

aux expériences de Hutton. Ici le tir étant sensiblement hori-

tal on a : $a = 1$ $cos.\ \alpha = 1$, et la formule (l) le réduit à

$$\frac{1}{\left(\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2}=v_0.$$

Nous allons d'abord nous occuper du tir du boulet de 3. Dans les expériences dont il s'agit, la vitesse du boulet de 3 étant de 1730 pieds anglais à 30 pieds du pendule, s'est réduite à 1682 pieds à 80 pieds, c'est-à-dire après un trajet de 50 pieds, on a ainsi : $v_0 = 1682$, $x = 50$, $V = 1730$.

On a pour calculer n, $1682 = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}n \times 50 + \frac{1}{\sqrt{1739}}\right)^2}$

d'où l'on tire $log. \frac{1}{2}n = \bar{6}.833377$.

Nous allons donner ici le tableau des résultats observés et de ceux calculés, toutes les mesures sont celles employées par Hutton, c'est-à-dire le pied et la livre anglais.

DISTANCES		CHARGES DE POUDRE.									
		24 ONCES, VITESSES		16 ONCES, VITESSES		12 ONCES, VITESSES		8 ONCES, VITESSES		4 ONCES, VITESSES	
DU CANON AU PENDULE BALISTIQUE.	EN PRENANT POUR VITESSE INITIALE CELLE A 30 PIEDS.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.
30 PIEDS.	0	1730	1730	1555	1555	1290	1290	1060	1060	680	680
80	50	1682	1682	1514	1514	1259	1259	1036	1036.9	669	668.1
130	100	1636	1636	1474	1474.7	1229	1229.1	1012	1014.5	659	656.5
180	150	1592	1591.8	1436	1436.8	1200	1200.3	989	992.8	649	645.2
230	200	1550	1549.4	1399	1400.4	1172	1172.4	966	971.8	640	634.1
280	250	1510	1508.7	1364	1365.4	1145	1145.5	944	951.6		
330	300	1471	1469.5	1330	1331.7	1119	1119.6	922	931.8		

Les boulets avaient 2 pouces 78 de diamètre et pesaient 2 livres 15 onces avoir du poids.

Dans les trois premières colonnes la coïncidence entre les résultats observés et ceux calculés est vraiment remarquable; dans la 4ᵉ les vitesses calculées sont plus grandes que celles observées, tandis que le contraire a lieu dans la 5ᵉ. Il est à croire que l'élasticité du bois du pendule a pu contribuer à augmenter l'amplitude de l'arc décrit.

La formule $v_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}nx + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2}$ peut servir à relier entre elles les expériences précédentes. Ainsi la vitesse restante étant de 1469.5 à 300 pieds, on peut chercher à quelle distance cette vitesse serait égale à 1474 pieds, répondant à 100 pieds dans la 2ᵉ colonne, on a : $1469.5 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}nx + \frac{1}{\sqrt{1474}}\right)^2}$, d'où l'on tire $x = 5$ pieds 85, en sorte que la vitesse de 1474 répond à 294 pieds 15, soit 294; or, 1474 pieds répond à 100 pieds dans la 2ᵉ colonne, la vitesse à 494 pieds deviendra donc 1331.2 au lieu de 1330 que donne le tableau.

Pour relier la 2ᵉ à la 3ᵉ colonne, nous poserons $1290 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}nx + \frac{1}{\sqrt{1331.2}}\right)^2}$, d'où nous tirerons $x = 63$ pieds 72, en sorte que la vitesse de 1290 pieds répondrait à $494.15 + 63.72 = 557$ pieds 87, soit 558 pieds. A 858 pieds, on aurait $v_0 = 1119.5$ qui est la valeur presque exacte de la vitesse.

Passons maintenant à la 4ᵉ colonne; on aura comme tout à l'heure $1060 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}nx + \frac{1}{\sqrt{1119.5}}\right)^2}$, d'où l'on tire $x =$

121.5, en sorte que cette vitesse répond à la distance de 979 pieds 50 à 1299 pieds 50 ; on a : $v_0 = 931$ pieds 8 au lieu de 922.

Pour arriver à la 5ᵉ colonne on pose :

$$680 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}nx + \frac{1}{\sqrt{931.8}}\right)^2}$$, on en tire $x = 820$ pieds 2 en sorte que la vitesse de 680 pieds répond à la distance de 2099.7, soit 2100 pieds à 2300 pieds, on a : $v_0 = 634$ pieds.

Passons maintenant au boulet de 6.

DISTANCES		CHARGES DE POUDRE.							
		3 LIVRES, VITESSES		2 LIVRES, VITESSES		1 LIVRE ½, VITESSES		1 LIVRE, VITESSES	
AU PENDULE BALISTIQUE.	EN PRENANT POUR VITESSE INITIALE CELLE A 30 PIEDS.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.	OBSERVÉES.	CALCULÉES.
30 p.	0	1813	1813	1676	1676	1506	1506	1306	1306
115	85	1748	1748	1618	1618.2	1454	1456.6	1259	1266.1
200	170	1686	1686.4	1562	1563.3	1404	1409.8	1214	1228
285	255	1627	1628.1	1508	1511.2	1356	1365	1171	1191.6

On a pour trouver la valeur de n :

$$1748 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}n \times 85 + \frac{1}{\sqrt{1813}}\right)^2}$$, d'où l'on tire $\log. \frac{1}{2}n = \bar{6}.706766$.

D'après le traité balistique du commandant Didion, il résulte des expériences de Metz que les vitesses restantes d'un boulet de 179 millim. 97, environ 18 cent. de diamètre, du poids de 21 kil. 378 à peu près, animé d'une vitesse initiale de 500 mét. sont :

Respectivement de	360 mèt.	270	212	169
Aux distances de	500 mèt.	1000	1500	2000

Le coefficient n a pour valeur : 0.000031933 et l'on trouve successivement 360 mèt. 271 210.06 170.19.

Coïncidence aussi parfaite que possible.

Nous allons maintenant appliquer la formule au tir des armes à feu portatives et particulièrement aux dernières expériences faites à Vincennes par suite de l'adoption de la balle de 16^m 7, et de la charge de 9 gr. de poudre pour le fusil.

L'équation de la trajectoire est :

$$y = x \, tang. \, \alpha + \frac{2gx}{5\, na (V \cos. \alpha)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2y}{15 n^2 a^2} \left[\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{\sqrt{V \cos. \alpha}} \right)^6 - \frac{1}{V^3 \cos.^3} \right]$$

Comme le tir a lieu sous de petits angles, on a $\cos. \alpha = 1$ et $a = 1$.

La vitesse initiale de la balle est de 450^m environ en nombre rond ; α est égal à 11′ 37″ et $tang. \alpha$ à 0.00332 ; $n = 0.0002192$, $g = 9^m$ 81.

Les formules qui donnent la vitesse restante aux diverses distances et celles qui donnent la durée du mouvement peuvent se calculer très-facilement et avec les éléments mêmes qui servent à déterminer la valeur de y.

Si de plus on remarque que :

$$x \, tang. \, \alpha + \frac{2\, gx}{5\, na\, (V \cos. \alpha)^{\frac{5}{2}}} \text{ et } \frac{nax}{2}$$

varient proportionnellement à la distance, et qu'une fois leur valeur calculée pour 100^m, par exemple, on la trouve de suite pour les autres distances par un calcul très-simple, on en conclura que l'équation (g) permet, en disposant les données avec ordre, de calculer, sans beaucoup de peine, les ordonnées de la trajectoire pour une série de distances données, et de trouver en même temps les vitesses restantes et les durées du mouvement.

Tir à 100 mètres, calculs préliminaires.

$$x = 100 \text{ mètres} \qquad \log.\ 2\,gx = 3.292699$$

$$x \tan g.\ \alpha = 0.332 \qquad \log.\ 5\,n\,V^{\frac{5}{2}} = \underline{3.672343}$$

$$+\frac{2gx}{5nV^{\frac{5}{2}}} = \underline{0\ 4172} \qquad \log.\ \frac{2gx}{5nV^{\frac{5}{2}}} = \bar{1}.620356$$

$$\tan g.\ \alpha + \frac{2gx}{5\,n\,V^{\frac{5}{2}}} = 0.7492.$$

$$\frac{nx}{2} = 0.01096 \qquad \log.\ V = 2.653213$$

$$\log.\ \sqrt{V} = 1.326606$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} = 0.04715 \qquad \log.\ \frac{1}{\sqrt{V}} = \bar{2}.673394$$

$$\frac{1}{V^3} = 0.000000010974 \qquad \log.\ \frac{1}{V3} = \bar{8}.040361$$

$$\frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} = 0.00010476$$

$$\log.\ 2g = 1.292699 \qquad \log.\ 15 = 1.176091$$

$$\log.\ 15n^2 = \underline{\bar{7}.857773} \qquad \log.\ n^2 = \underline{\bar{8}.681682}$$

$$\log.\ \frac{2g}{15n^2} = 7.434926 \qquad \bar{7}.857773$$

$$\log.\ \frac{2}{3n} = 3.483068.$$

Calcul : $x = 100^m$ abcisse ordonnée.

$$x\,tang.\,\alpha + \frac{2gx}{5nV^{\frac{5}{2}}} = \qquad 0^m.7492$$

$$\frac{nx}{2}\ 0.01096$$

$$+\frac{1}{\sqrt{V}} = 0.04715$$

$$\overline{0.05811}$$

$$log.\ 0.05811 = \bar{2}.764251$$

$$6$$

$$log.\ \left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^6 = \bar{8}.585506$$

$$\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^6 = 0.000000038504$$

$$-\frac{1}{V3} = 0.000000010974$$

$$\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^6 - \frac{1}{V3} = 0.00000002753$$

$$log.\ \text{didem.} = \bar{8}.439806$$

$$log.\ \frac{2g}{15n^2} = 7.434926$$

$$\bar{1}.874732$$

nombre — 0.7494

reste — 0.0002

Le but en blanc se trouve donc sensiblement à cette distance :

Vitesse restante.

On a $v_0 = \frac{1}{\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2}$ calcul :

$$\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}} = \quad 0.05811$$

$$log.\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2 = \begin{cases}\overline{2}.764251 \\ \qquad\quad 2\end{cases}$$

$$\overline{3}.528502$$

$$log.\frac{1}{\left(\frac{\alpha nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2} = 2.471498 = log.\ v_0.$$

$v_0 = 296$ mètres 10.

Durée du mouvement :

$$t = \frac{2}{3n}\left[\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 - \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}}\right] \text{calcul :}$$

$$log.\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 = \frac{\overline{2}.764251 \qquad 3}{\overline{4}.292753}$$

$$\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 = 0.00019622$$

$$-\frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} = \frac{0.00010476}{0.00009146}$$

$$log.\left[\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 - \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}}\right] = \overline{5}.961231$$

$$log.\ \frac{2}{3n} = 3.483068$$

$$log.\ t. = \overline{1}.444299$$

$t = 0''.2781.$

Tir à 200 mètres.

Ordonnée de la trajectoire, calcul :

$$x \text{ tang. } \alpha + \frac{2gx}{5nV^{\frac{5}{2}}} = \qquad 1.4984$$

$$\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}} = \begin{array}{r} 0.02192 \\ 0.04715 \\ \hline 0.06907 \end{array}$$

$$\text{log. } (0.06907)^6 = \begin{array}{r} \bar{2}.839289 \\ 6 \\ \hline \bar{7}.035734 \end{array}$$

$$\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^6 = 0.00000012857$$

$$- \frac{1}{V^3} = 0.000000010974$$

$$\overline{\qquad 0.000000097596}$$

$$\text{log. } \left(\frac{nx}{2} = \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^6 - \frac{1}{V^3}\Big) = \bar{8}.989431$$

$$\text{log. } \frac{2g}{15n^2} = 7.434916$$

$$\overline{\qquad 0.424347}$$

nombre. — 2.6561

ordonnée. — 1.1577

Au lieu de 1.15.

Vitesse restante.

Calcul :

$$\text{log. } \left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2 = \begin{array}{r} \bar{2}.839289 \\ 2 \\ \hline \bar{3}.678578 \end{array}$$

$$log.\ v^{o} = log.\ \frac{1}{\left(\frac{nx}{2} + \sqrt{V}\right)^{2}} = 2.321442$$

$v_{o} =$ 209 mètres 61...

Durée du mouvement.

Calcul :

$$log.\ \left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^{3} = \frac{\bar{2}.839289}{\frac{3}{\bar{4}.517867}}$$

$$\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^{3} = 0.00032951$$

$$- \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} = \frac{0.00010476}{0.00022475}$$

$$log.\ \left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^{3} - \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} = \bar{4}.351699$$

$$log.\ \frac{2}{3n} = 3.483068$$

$$log.\ t = \bar{1}.834767$$

$t = 0''.6835.$

Tir à 300 mètres.

Ordonnée de la trajectoire, calcul :

$$x\ tang.\ \alpha + \frac{2gx}{5nV^{\frac{5}{2}}} = 22^{m}.476$$

$$\begin{array}{r} 0.03288 \\ 0.04715 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}} = 0.08003$$

$$\log.\ (0.08003)^6 = \overline{2}.903253$$
$$6$$
$$\overline{7}.419518$$

$$\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^6 = 0.000000262735$$
$$-\frac{1}{V^3} \qquad 10974$$
$$251761$$

$$\log.\ \text{d'idem}, \qquad \overline{7}.400986$$
$$\log.\ \frac{2g}{15n^2} = \qquad 7.434926$$
$$0.835912$$

nombre — 6.8535
ordonnée — 4.6059

La théorie des points d'impact a donné 4^m 67, qu'on a porté plus tard à 4^m 70. On conçoit que les indications que donne l'expérience pour le tir du fusil à cette distance manquent de précision, c'est-à-dire que si l'on recommençait les expériences, on ne trouverait pas exactement 4^m 70 pour l'ordonnée à 300^m.

Vitesse restante.

Calcul :

$$\overline{2}.903253$$
$$\log.\ \left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2 = \frac{2}{\overline{3}.806506}$$
$$\log.\ v_0 = \log.\ \frac{1}{\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2} = 2.193294$$

$$v_0 = 156 \text{ mètres } 13.$$

Durée du mouvement.

Calcul :

$$log.\left(\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 = 4.709759$$

$$\left(\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 = 0.0005125$$

$$-\frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} = 0.0001048$$

$$\overline{4077}$$

$$log.\left[\left(\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 - \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}}\right] = \bar{4}.610341$$

$$log.\ \frac{2}{3n} = 3.483068$$

$$log.\ t = \overline{0.093409}$$

nombre $t = 1''.24$.

Tir à 600 mètres.

Calcul, ordonnée :

$$x\ tang.\ \alpha + \frac{2gx}{5nV^{\frac{5}{2}}} = \qquad 4.4952$$

$$\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}} = \begin{array}{r} 0.06576 \\ 0.04715 \\ \hline 0.11291 \end{array}$$

$$log.\ (0.11291)^6 = \begin{array}{r} \bar{1}.052732 \\ 6 \\ \hline \bar{6}.316392 \end{array}$$

$$\left(\frac{nx}{2} + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^6 = 0.000002072$$

$$-\frac{1}{V^3} = 0.000000010974$$

$$\overline{2061026}$$

$$log.\ \text{d'idem} = \bar{6}.314078$$

$$log.\ \frac{2g}{15n^2} = 7.434926$$

$$\overline{1.749004}$$

nombre	— 56.1055
ordonnée	— 51.6103

$$tang. = \frac{51.61}{600} = tang.\ 4°.55'.$$

mais on a $\alpha = 11'\ 37''$; on aura donc pour l'angle de tir répondant à une portée de 600^m, 5° 6′ 37″, quantité déjà un peu forte puisqu'il est d'expérience qu'on obtient cette portée avec la balle actuelle sous l'angle de 5°, en sorte que nous pensons que les ordonnées obtenues par la théorie des points d'impact sont un peu trop fortes pour les distances de 300 et 400^m.

Vitesse restante.

Calcul :

$$log.\ v_0 = log. \frac{1}{\left(\frac{nx}{2} + \sqrt{V}\right)^2} = 1.894536$$

$$v_0 = 78 \text{ mètres } 44.....$$

Durée du mouvement.

$$log.\ \left(\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 = \overline{3}.158196$$

$$\left(\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 = 0.0014394$$

$$\frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} = 0.0001048$$

$$\overline{0.0013346}$$

$$log.\ \left[\left(\frac{nx}{2}+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 - \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}}\right] = \overline{3}.125351$$

$$log.\ \frac{2}{3n} = 3.483068$$

$$log.\ t = \overline{0.608419}$$

$$t = 4''.059.$$

Les formules précédentes s'appliquent parfaitement au tir du mousqueton de gendarmerie, à celui du mousqueton de cavalerie et au fusil de dragon et de voltigeur corse.

Pour comparer notre formule aux résultats que donnent les tables de M. Didion, prenons pour exemple les expériences faites à Metz, en 1846, sur le tir du canon de 16. La plus saillante de ces expériences consiste dans une série de 100 coups tirés à la charge de 1 kil. 333, sous l'angle dont la tangente est 0,02593. Les points d'impact étaient relevés à l'aide des quatre réseaux en ficelle qui permettaient de les déterminer à moins de 1 cent. près. Chaque ordonnée de la trajectoire

conclue était la moyenne de 100 coups. Les points obtenus étaient au nombre de cinq : 1° à la bouche, 2° à deux cents mètres, 3° à quatre cents mètres, 4° à six cents mètres, et 5° à 666^{m} 80.

La vitesse initiale des boulets, mesurée à l'aide du pendule balistique, nous paraît devoir être fort rapprochée de 405^{m} : nous adopterons donc ce chiffre pour appliquer les formules.

Distances : 0, 200^{m}; 400^{m}; 600^{m}; 666^{m} 8.

Ordonnées de la trajectoire déduites des expériences de Metz.

0, 3^{m} 917 ; 4^{m} 305 ; — 0^{m}003 ; — 2^{m} 759.

Calculées d'après les tables du commandant Didion.

0, 3^{m} 842 ; 4^{m} 317 ; 0^{m} 197 ; — 2^{m} 479.

Id. d'après ma formule.

0 3^{m} 839 ; 4^{m} 305 ; 0^{m} 13 ; — 2^{m} 551.

On voit par l'inspection de ces résultats que les ordonnées obtenues à l'aide de notre formule se rapprochent autant de l'expérience que celles que donnent les tables de M. Didion.

Toutefois nous remarquerons ici que pour le canon, comme pour le fusil, l'on n'obtient par la théorie des points d'impact que des résultats probables, et qu'il pourrait arriver qu'en recommençant les expériences dont il s'agit, avec tous les soins imaginables, on fût conduit pourtant à des résultats différents.

Cherchons maintenant la vitesse restante à 600^{m}. On trouve par ma formule $v = 252^{m}\,7$, tandis que les tables de M. Didion donnent 253^{m} 1. Quant à la durée du trajet, elle est, d'après ma formule, de 1'' 906, résultat conforme à celui que donnent les tables de M. Didion. Les deux trajectoires peuvent donc être considérées comme étant presque identiques dans le trajet de 600^{m}.

Prenons pour second exemple du tir du canon celui de la pièce de 8 de campagne ; soit $V = 470^{m}$ $tang.\ \alpha = \frac{31}{1818}$

(*Aide-mémoire*, page 9). Cherchant les ordonnées de la trajectoire et les hausses correspondantes.

A 500^{m}, on trouve $y = + 0^{m}166$, quantité inappréciable à cette distance.

A 600^{m}, on trouve $y = - 2^{m}848$, répondant à une hausse de $\frac{2.848 \times 1.818}{600} = 8^{mil}63$; soit 9^{mil}.

A 800^{m}, on a $y = - 13^{m}742$, qui correspond à une hausse de $31^{mil}23$; soit 31^{mil}.

A 1000^{m}, on a $y = - 33^{m}276$, répondant à une hausse de $60^{mil}\frac{1}{2}$.

A 1200^{m}, on trouve $y = - 64^{m}686$, qui correspond à 98^{mil} de hausse.

Tous ces résultats se rapprochent beaucoup de l'expérience.

Soit encore pour exemple le tir à ricochet de la pièce de 16. On trouve dans l'*Aide-mémoire* de 1844, page 417, que la hausse répondant à la charge de 503 grammes, à une distance de 500^{m}, et à une élévation de 10^{m} de la crête intérieure, au-dessus de la bouche de la pièce, est de 112^{mil}.

La vitesse initiale du boulet, déduite des relations données page 429, est de 231^{m} environ.

Nos formules donnent dans ce cas : $tang\,\alpha = 0.07768$, et retranchant l'angle d'élévation dont la tangente est 0.02, on a $\frac{h + 61^{mil}}{3086^{mil}} = 0.05768$ et $h = 117^{mil}$.

La tangente de l'angle d'arrivée est dans ce cas $2 = -0.512$, répondant à $2°56$, soit $3°$.

D'après les expériences de Metz, la vitesse initiale du boulet de 16 avec la même charge aurait été de 247^{m}, ce qui suppose des pièces en meilleur état ou une poudre plus forte, et, dans ce cas, la hausse aurait été de 95^{mil}. La hausse moyenne serait donc de 106^{mil}, au lieu de 112 que donne l'*Aide-mé-*

moire. Nous remarquerons qu'une des conditions du tir à ricochet, c'est que le projectile tombe dans l'ouvrage contre lequel il est dirigé ; ce qui oblige à tenir la hausse plutôt un peu forte que trop faible.

Pour terminer ce qui est relatif aux projectiles sphériques, examinons un des tirs les plus lents en usage dans l'artillerie, le tir des bombes à 300^m et 350^m.

Une bombe lancée dans le vide sous l'angle de 45° avec une vitesse de 57^{m}20 par seconde aurait une portée de 333^{m}5, et l'angle de chute serait de 45°.

D'après Lombard, la portée d'une bombe de 22 cent. dans l'air serait de 308^m et l'angle de chute de 47° 4'.

Ma formule donne dans le même cas et pour $a = 1.22965$ (page 45) une portée de 309^m 5 et un angle de chute de 46° 56' environ.

Pour $a = 1$, $x = 315^m$ et l'angle de chute $= 46°\ 48$.

On remarque dans le tir des bombes à de petites distances, que le point de chute du projectile qui a touché la perche, est à une distance du pied de cette même perche, à peu près égale à la hauteur du point touché. Ce qui semble indiquer que l'angle de chute réel est moins ouvert que ne le suppose la théorie et que la portée est plus grande.

On peut inférer de là, que la loi que nous avons adoptée pour la résistance de l'air, donne des résultats plus rapprochés de l'expérience que les formules de Lombard pour le tir à faible charge et surtout dans l'hypothèse de $a = 1$.

Pour des vitesses initiales de 100 à 108^m il y a un accord presque parfait entre notre formule et celle de Lombard, surtout en supposant $a = 1$. Au delà, les portées deviennent d'autant plus courtes, relativement à celles de cet auteur, que les vitesses sont plus grandes, ce qui tient à ce que l'hypothèse de la résistance de l'air, proportionnelle au carré de la vitesse, s'éloi-

gne d'autant plus de la vérité que la vitesse initiale est plus grande.

A mesure que les portées augmentent, l'accord qu'elles présentent soit entre elles, soit avec la théorie, devient moins parfait, et ce serait cependant pour les distances extrêmes que la théorie serait fort utile, soit pour éviter des expériences dispendieuses et incertaines, soit pour déterminer les limites des effets qu'une arme peut produire.

Pour le tir aux grandes distances et sous de grands angles, la raréfaction des couches supérieures de l'air détermine évidemment une augmentation de portée.

Pour calculer la trajectoire dans ce cas, il faudrait diviser la courbe en arcs de 3 à 5°, prendre la valeur de y correspondant à chaque point de division et y transporter l'origine, en prenant pour densité celle qu'on trouverait à l'origine de chacun de ces arcs. On conçoit qu'on approchera d'autant plus de la trajectoire réelle, que les points de division se seront plus rapprochés.

Si l'on connaissait la hauteur du baromètre, la température et le degré d'humidité de l'air, il serait facile de calculer la valeur de δ à l'origine de chacun des arcs, mais il n'en est point ainsi, et l'on est obligé dans la pratique de se contenter d'une simple évaluation approximative.

En supposant une colonne atmosphérique de même température et constitution dans toute son étendue, on sait, d'après la loi de Mariotte, que les densités des couches successives de cette colonne vont en décroissant en progression géométrique quand les hauteurs vont en progression arithmétique. Il résulte donc de là, que, la série des hauteurs et celle des densités correspondantes formeront un système de logarithmes, ou en d'autres termes, que les hauteurs peuvent être considérées comme les logarithmes des densités.

Soit d la densité à la hauteur y on aura $-Ay = Log.\ d + C$, A et C étant des constantes à déterminer et qui dépendent du rapport qui existe entre les deux progressions. Nous avons donné le signe $-$ à y parce que la densité diminue à mesure que la hauteur augmente.

A la surface du sol $y = o$, et si l'on appelle D la densité de l'air en ce point on aura : $o = log.\ D + C$, d'où l'on tire $C = -\ log.\ D$ et partant $log.\ d = log.\ D - Ay$.

Pour déterminer A

on a $A = \frac{1}{y}\ log.\ \left(\frac{D}{d}\right)$ ou $= \frac{1}{y}\ log.\ \left(\frac{H}{h}\right)$ à cause de $\frac{H}{h} = \frac{D}{d}$, H et h étant les hauteurs barométriques répondant aux densités D et d.

Les logarithmes que donne la formule précédente sont ceux de Neper; il faut pour les ramener aux logarithmes des tables, que nous désignerons par $Log.$, les multiplier par 0.4343, et l'on a :

$Log.\ d = Log.\ D - 0.4343\ Ay$.

Et comme cette formule peut être amenée à la forme de $Log.\ \frac{d}{D} = -\ 0.4343\ Ay = Log.\ \frac{d \times 1 \times g}{D \times 1 \times g} = Log.\ \frac{\delta'}{\delta}$: on aura aussi $Log.\ \delta' = Log.\ \delta - 0.4343\ Ay$.

La valeur de la constante A dans l'hypothèse que nous avons adoptée est $\frac{1}{a}$, a étant la hauteur de la colonne d'air, dont la densité est D et dont le poids est égal à celui de la colonne de mercure dont la hauteur est H, en supposant l'air 825 fois moins dense que l'eau, $H = 0^m\ 76$ et la pesanteur spécifique du mercure $= 13.598$, on a : $a = 8526^m$ et partant $Log.\ \delta' = Log.\ \delta - 0.00005094\ y$. Pour $y = 1500^m$ on trouve $\delta' = 1^k\ 0274$; δ étant supposé de $1^k\ 225$ et $\frac{\delta'}{\delta} = 0.8387$ on aura dans ce cas $n' = 0.8387\ n$.

Mais, comme la température de l'air va en diminuant à mesure qu'on s'élève, il est préférable de déduire la valeur de A de l'expérience, et par conséquent de la constitution intime de l'air.

L'équation $A = \frac{1}{y}\ log.\ \left(\frac{H}{h}\right)$ donne lieu à la même observation que ci-dessus, et à cause de $log.\ \left(\frac{H}{h}\right) = 2.302\, Log.\left(\frac{H}{h}\right)$ on aura $A = \frac{2.302}{y}\ log.\ \left(\frac{H}{h}\right)$...

En déduisant la valeur de A des expériences de M. Humbold à Guanataxo, on trouve $A = 0.0001146$, en sorte que l'équation $Log.\,\delta' = Log.\ \delta - 0.4343\ Ay$ devient $\delta' = Log.\ \delta - 0.00004977\ y$, valeur qui ne diffère que de $0.00000117\ y$ de celle trouvée ci-dessus, soit $y = 1500$, on a $\delta' = 1^k\ 0315$ au lieu de 1.0274 ; diff. 0.0041 ou $\frac{1}{255}$.

Toutefois les différences entre les portées obtenues dans l'hypothèse d'une densité constante de l'air, et celles calculées en ayant égard à la variation de densité, sont généralement peu considérables ; ainsi pour un boulet de 24 lancé sous l'angle de 43°, à la distance de 4392^m, la différence est de 200^m environ. Cette différence serait moindre pour une bombe de 32° lancée à 4,000 mètres.

Dans l'application de ce que nous venons de dire relativement à la variation de densité de l'air, il conviendra de tenir compte de la grandeur des arcs de division, de la vitesse avec laquelle ils sont parcourus, et de la hauteur à laquelle ils se trouvent. Dans beaucoup de cas une division en arcs de 15° sera suffisante.

Pour donner un exemple de l'application de nos formules, nous allons calculer la trajectoire d'une bombe de 32 cent.

pour laquelle on aurait $n = 0.0000311$; nous la supposerons lancée sous l'angle de 45° à une distance de 1004^m (*Expériences de Lafère* 1771).

Nous admettrons que la vitesse initiale de la bombe ait été de 111^m 30.

En divisant chaque branche de la trajectoire en arcs de 15° on trouve :

Branche ascendante.

Arc de 45° à 30 pour lequel $a = 1.4431$.
$x = 242^m\ 3$; $y = 192^m\ 6$; $v = 82^m\ 70$.
Arc de 30 à 15° pour lequel $a = 1.13601$.
$x = 133^m\ 06$; $y = 66^m\ 92$; $v = 70^m\ 83$.
Arc de 15 à 0° pour lequel a $= 1.01782$.
$x = 123^m\ 8$; $y = 26^m\ 27$; $v = 66^m\ 25$.

Abcisse du point culminant de la trajectoire 521^m 16, ordonnée 283^m 79, vitesse restante 66^m. 25.

Un seul arc de 45° à 0°. $x = 528^m$.
$a = 1.22965$. $y = 279^m$.
Vitesse restante... $v = 66^m\ 29$.

En sorte que les différences entre les abcisses sont de 6^m 84 et celles entre les ordonnées de 6^m 79.

On voit par ce calcul que la décomposition de la trajectoire en arcs successifs diminue l'abcisse du point culminant de la trajectoire et augmente son ordonnée. L'emploi d'arcs plus petits rapprocherait et élèverait ce point un peu davantage.

Branche descendante.

Arc de 0° à — 15° pour lequel $a = 1.01782$
$x = 116^m\ 20$; $y_{,} = -15^m\ 6$; $v = 66^m\ 58$
Arc de — 15° à — 30° pour lequel $a = 1.13601$
$x = 125.63$; $y_{,} = -53^m\ 96$; $v = 71^m\ 68$

Arc de — 30° à — 45° pour lequel $a = 1.4434$
$x = 156^m\ 78$; $y_{,} = -\ 123^m\ 22$; $v = 83^m\ 11$

On a donc pour l'amplitude de la branche descendante jusqu'au point ou la tangente $= -1$; $398^m\ 61$, et pour l'abaissement de ce même point au-dessous du sommet de la courbe $192^m\ 78$, en sorte que $258.79 - 192.78 = 93^m\ 01$ est l'ordonnée du point dont nous nous occupons ici. L'abcisse de ce même point est de $521.16 + 398.61 = 919.77$, soit 920^m.

Un seul arc de 0° à — 45° pour lequel $a = 1.22965$ donnerait $x = 397^m\ 3$; $y_{,} = 186^m\ 4$, et partant $y = 279^m - 186^m\ 4 = 92^m\ 6$.

En sorte que pour les deux arcs de 0° à ± 45°, on a $925^m\ 3$ pour l'abcisse du point que nous considérons.

En calculant la trajectoire comme un seul arc de + 45° à — 45° on trouve

$$x = 925^m\ 40;\ y = 92^m\ 2;\ v = 83^m\ 17.$$

Il résulte de ce qui précède, que le calcul de la trajectoire, par arcs successifs, ne donne pas des résultats notablement différents de ceux qu'on obtiendrait en calculant chaque branche séparément, ou la trajectoire tout entière.

Pour calculer la portée à l'aide du moyen que nous avons indiqué page 30,

$$\text{on a } b = x' \, tang.\, \alpha + \frac{gx'^2}{2V^2 cos.^2 \alpha}$$

ici $b = 92^m\ 20$ $tang.\ \alpha = 1$ $cos.^2\ \alpha = \frac{1}{2}$... $v = 83^m\ 17$

$$\text{il viendra donc } 92^m\ 20 = x' + \frac{9.81\ x'^2}{\overline{83.17}^2}.$$

d'où l'on tire $x' = 82^m\ 6$; la portée entière deviendra donc $P = 1008^m$.....

Supposant $y = o$ dans l'équation de la trajectoire, et subs-

tituant à la place de x la valeur 1008 dans les termes $x\ tang\ \alpha$ et $\frac{2gx}{5na(\sqrt{cos.\alpha})^{\frac{5}{2}}}$ et extrayant la racine 6e on trouve $x = 1007^m 9$ soit 1008 en nombre rond.

Cette portée est celle qui résulte de l'emploi de la valeur unique $a = 1.22965$, mais en ayant égard à la variation de a, la portée réelle serait un peu plus petite et fort approchée de 1004^m, portée expérimentale (1).

Le calcul des portées présente assez de difficultés quand on veut avoir égard aux variations de a. Toutefois, la discussion précédente fait voir que pour la partie de la courbe qui est située au-dessus de l'arc des x, on peut se contenter de prenpre pour a, la valeur moyenne a_0, déterminée par l'angle de projection, sans qu'il en résulte d'erreur notable.

Il y a plus, c'est que dans beaucoup de cas, la valeur $a = 1$ qui fournit les portées les plus longues, donne une trajectoire qui se rapproche assez de l'expérience, du moins pour la seule partie de la courbe qu'on a coutume de considérer.

Pour calculer la portée, nous poserons :

$$\text{(page 40)}\ y = x\ tang\ \alpha - \frac{g\,x^2}{2\,V^2\,cos^2\,\alpha}\,Y.$$

Divisant par x on obtient :

$$\frac{y}{x} = tang\ \alpha - \frac{gx}{2\,V^2\,cos^2\,\alpha}\,Y.$$

x et y étant les coordonnées du point à abattre

$\frac{y}{x}$ est la tangente de l'angle d'élévation du but, angle qu'il est

(1) Pour un arc de 45 à 50°, on trouve page 43, $a = 1.80786$, on a pour la vitesse à l'origine de cet arc $V = 83^m, 11$ et $x = 65^m\ 43$, $y = -72^m\ 47$, $v = 88^m\ 89$. L'ordonnée du point le plus bas de l'arc est donc de $93^m\ 01 - 72.\ 47 = 20^m\ 54$ et son abcisse de $985^m\ 50$.

Prenant un arc de 50 à 51°, et on arrivera par des tâtonnements successifs à trouver $y = o$ qui donnera la portée que l'on cherche.

toujours facile d'observer et que nous appelons θ; on aura donc :

$$tang\ \theta = tang\ \alpha - \frac{gx}{2\,V^2 cos^2\,\alpha} Y.$$

d'où l'on tire $x\,Y = 2\,V^2 \frac{cos^2\,\alpha}{g} (tang\ \alpha - tang\ \theta)$.

Multipliant par na,

$$\text{on a}\ \frac{nax}{2}\ Y = na\ \frac{V^2 cos^2\,\alpha}{g} (tang\ \alpha - tang\ \theta)\ (V)$$

$= p$, quantité donnée par les conditions du problème.

La fonction $\frac{nax}{2}$. Y étant composée de nax et de V $cos\ \alpha$, on conçoit qu'on pourra en dresser des tables, analogues de tout point à celles dont il a été question à la page 41, et qu'à l'aide de V $cos\ \alpha$, il sera facile de trouver la portée par de simples proportions.

Le calcul de la vitesse initiale se déduit de la même équation qui donne :

$$\frac{V\,cos.\,\alpha}{\sqrt{Y}} = \sqrt{\frac{gx}{2\,(tang.\,\alpha - tg\,\theta)}} = r$$

On pourra également dresser des tables de la fonction $\frac{V\,cos\ \alpha}{\sqrt{Y}}$ qui permettront de calculer V quand on connaîtra x et r.

La trajectoire dans l'air est une courbe qui présente deux asymptotes, l'une inclinée et appartenant à la branche ascendante, l'autre verticale et appartenant à la branche descendante.

(1) M. le commandant Didion a calculé des tables qui servent à la résolution des problèmes dont nous venons de parler.

L'existence de ces asymptotes est facile à comprendre.

Ainsi, pour l'asymptote inclinée, on conçoit que, puisque la vitesse du mobile va en diminuant de l'origine au sommet de la courbe, si l'on suppose celle-ci prolongée au-dessous de l'origine, la vitesse ira toujours en augmentant à mesure qu'on s'éloignera de ce point, elle pourra donc devenir infinie; dès lors la pesanteur pourra être considérée comme nulle et le mobile se mouvra en ligne droite; cette ligne prolongée ne sera donc autre chose que l'asymptote qu'on cherche.

Pour arriver à la détermination de cette asymptote inclinée nous poserons les formules page 86.

$$v = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^2} = \frac{1}{\cos.\omega\left(\frac{nax}{2}+\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}}\right)^2}$$

$$v_0 = v\cos.\omega \text{ et } z = tang\,\alpha + \frac{2g}{5na}\left(\frac{1}{(V\cos.\alpha)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(v\cos.\omega)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

Si nous transportons l'origine au point où la vitesse est infinie, en appelant A l'angle formé par l'asymptote avec l'axe des x, faisant $V = \infty$, $z = tang\,\alpha$ et $\omega = \alpha$, on aura

$$tang\,\alpha = tg\,A + \frac{2g}{5na}\,\frac{1}{(V\cos.\alpha)^{\frac{5}{2}}} \text{ et partant :}$$

$$tang\,A = tang\,\alpha + \frac{2g}{5na}\,\frac{1}{(V\cos.\alpha)^{\frac{5}{2}}}.$$

La position de ce point est donnée par la formule

$$X = \frac{2}{na}\,\frac{1}{\sqrt{V\cos.\alpha}} \text{ qui résulte de } \frac{nax}{2} + \frac{1}{\sqrt{V\cos\alpha}} = o.$$

Lorsque α est assez petit pour que a puisse être considéré comme constant, cette formule suffit pour calculer assez exactement la position de l'asymptote.

Ainsi, pour le fusil d'infanterie tiré sous l'angle dont la tangente est 0.00331, la ligne de mire étant horizontale, on a

$tang.\, A = 0.00331 + \frac{2g}{5na}\ \frac{1}{(450)^{\frac{5}{2}}} = 0.007477$ qui donne $A = 25'\,42''$ environ. Et $X = 430^{m}\,1$.

Les formules précédentes suffiraient encore pour le tir ordinaire du canon, et en général pour toutes les trajectoires, pour lesquelles la valeur de a diffère peu de l'unité. Mais pour des tirs plus infléchis, et principalement pour les bombes, il n'en sera point ainsi et on ne pourra opérer que par tâtonnement.

A cet effet, on calculera la vitesse qui correspond à des arcs de graduation donnée à partir de l'origine, et pour lesquels on cherchera la valeur de a. On transportera successivement l'origine à l'extrémité de chaque arc et on déterminera la vitesse initiale pour cette nouvelle origine, et tant que la vitesse obtenue sera positive, l'angle que fait l'asymptote avec l'axe des x sera plus grand que l'angle essayé; le contraire aura lieu quand la vitesse deviendra négative,

La formule $z = tang.\, \alpha + \frac{2g}{5na} \left(\frac{1}{(V \cos.\, \alpha)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(v \cos.\, \omega)^{\frac{5}{2}}} \right)$

donne $\frac{1}{(v \cos.\, \omega)^{\frac{5}{2}}} - (tang.\, \alpha - z)\, \frac{5na}{2g} = \frac{1}{(V \cos.\, \alpha)^{\frac{5}{2}}}$

V étant pris pour la vitesse initiale et α pour l'angle de tir le plus grand.

Soit pour exemple, le tir d'une bombe de 32^{cent} pour laquelle $v = 111^{m}\,5$, $\omega = 45°$, $z = tang.\, \omega = 1$; $\alpha = 60°$. $a = 2.11250$, $log\, n = \bar{5}.492900$.

Effectuant les calculs on trouve $V = 246^{m}\,40$.

Pour $\alpha = 62^\circ$; $a = 2.33256$; $V = 412^m\ 80$

$\alpha = 62^\circ\ 30'$; $a = 2.36746$; $V = 571.\ 7$

$\alpha = 63^\circ \ldots$ $a = 2.403\ldots$ on obtient un résultat négatif.

L'asymptote fait donc avec l'axe des x un angle compris entre $62^\circ\ 30$ et 63°.... Après divers essais on trouve $A = 62^\circ\ 56'\ {}^1/_2$, en nombre rond, et $X = 2228^m$.

Quant à l'asymptote verticale, on conçoit qu'à mesure que la composante horizontale de la vitesse diminue par l'effet de la résistance de l'air, la branche descendante de la trajectoire se redresse de plus en plus, et qu'à sa limite le mobile suit la direction verticale, qui est alors tangente à la courbe à une distance infinie.

Il se présente, dans le mouvement de chute des corps dans l'air, un fait assez remarquable que nous allons examiner.

En supposant que la densité du milieu soit constante, il arrive un moment où la vitesse de chute devient uniforme; cette circonstance a lieu dans la branche descendante de la trajectoire, quand la résistance de l'air équivaut à la gravité. On conçoit en effet, que l'accélération due à la pesanteur étant détruite à tout moment par la résistance du milieu, la vitesse doit être constante.

Appelant u la vitesse dont il s'agit, on aura $g = nu^{\frac{5}{2}}$, d'où l'on tire $u = \left(\frac{g}{n}\right)^{\frac{2}{5}}$. C'est la plus grande vitesse verticale que les corps puissent acquérir par l'effet de la gravité.

Examinons si nos formules donnent ce résultat pour la vitesse finale :

L'équation (g) page 26 donne $\frac{dx}{dt} = v_0 = \frac{\left(\frac{2}{5}g\right)^{\frac{2}{5}}}{(C - : naz)^{\frac{2}{5}}}$

et $\frac{ds}{dt} = v = \frac{\sqrt{1+z^2}\ \left(\frac{2}{5}g\right)^{\frac{2}{5}}}{(C - naz)^{\frac{2}{5}}}$

Lorsque le mobile se meut verticalement on a $z = \infty$ et $a = \frac{2}{5} \infty^{\frac{3}{2}}$ (page 54); substituant il vient : $u = -\left(\frac{g}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$, comme on devait s'y attendre.

Soit un obus ou une bombe de 22 cent tombant d'une hauteur indéfinie, on trouve $u = 137^m\ 26$. Pour une bombe de 32 cent pour laquelle, on a $log.\ n = \bar{5}.492900$, on obtiendrait $u = 158^m\ 51$.

Si l'on tenait compte de la variation de la densité du milieu, la vitesse finale irait en diminuant, à partir du point pour lequel la résistance de l'air serait égale à la gravité.

En supposant la hauteur de chute extrêmement grande, la densité de l'air croissant, d'après la loi de Mariotte; la résistance de ce fluide devenant de plus en plus grande, il arriverait un moment où la vitesse serait nulle et où le corps demeurerait suspendu dans l'air.

La formule $log.\ \delta = log.\ \delta' - 0.00005094\ y$ devient dans ce cas, c'est-à-dire quand on compte les y de haut en bas,

$$log.\ \delta' = log.\ \delta + 0.00005094\ y,$$

dans laquelle δ' représente le poids d'un mètre cube d'air à la surface de la terre.

A 100.000^m on a

$$log.\ \delta = log.\ 1.225 + 5.094 = 5.182136.$$

Le poids du mètre cube d'eau étant de 1000^k, on aura pour la pesanteur spécifique de l'air à cette distance 2.182136, répondant à 152.10, c'est-à-dire que cette densité serait de 6.892 fois, environ 7 fois celle du platine (1).

(1) Ce calcul conduit à cette circonstance singulière, savoir : qu'un globe d'air atmosphérique de même volume que la terre aurait plus de masse que cette planète.

On pourrait demander à quelle distance la densité de l'air serait de 7.207, c'est-à-dire égale à celle de la fonte; on aurait dans ce cas

$Log. \frac{7.207^k}{1^k 225} = 0.0005094\, y$ ou $8526\ log. \frac{7.207}{1,225} = y. =$ 32140^m environ (1).

Le mouvement vertical qui doit terminer toute trajectoire suffisamment étendue, n'ayant lieu réellement qu'à l'infini, on voit que la verticale dont il s'agit est une asymptote à la trajectoire. La formule

$$z = tang.\,\alpha + \frac{2g}{5na\,(\sqrt{\cos.\,\alpha})^{\frac{5}{2}}} - \frac{2g}{5na}\left(\frac{nax}{2} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\cos.\,\alpha}}}\right)$$

dans laquelle z et $tang.\ \alpha$ sont négatifs donne le moyen de calculer la valeur de x, pour tous les arcs que l'on considérera. Ainsi, en partant du sommet de la courbe, si l'on considère un arc de 15° on aura $tang.\ \alpha = o$ et $z = -\ tang.\ 15^o\ a =$ 1.08171 (page 44), et on prendra pour vitesse initiale celle en ce point donnée par la formule

$$u = \frac{V}{\left(\frac{nax}{2}\sqrt{\sqrt{\cos.\,\alpha} + 1}\right)^2} \text{ (page 28)}$$

La vitesse restante à l'extrémité de l'arc de 15° sera donnée par la formule :

(1) Malgré les travaux des savants, on ignore encore entièrement ce qui a lieu dans les cas extrêmes. Peut-être arrive-t-il que l'augmentation de densité est contrebalancée par l'augmentation de température. C'est-à-dire que la tension de l'air augmente, sans que la densité croisse dans le même rapport. Ceci supposerait que la loi de Mariotte cesse d'avoir lieu passé un certain terme, ce qui est infiniment probable.

$$v = \frac{u}{\cos. 15^{\circ} \left(\frac{nax}{2} \sqrt{u+1} \right)^{2}}.$$

On passera de l'arc de — 15° à celui — 30° en prenant $\alpha = 15^{\circ}$ et $z = tang\ 30^{\circ}$, $a = 1.08875$; et pour vitesse initiale la valeur v ci-dessus... et ainsi de suite.

Il sera nécessaire d'avoir recours à la formule

$$b = \frac{1}{2(tang\ \alpha - z)} \left[tang\ \alpha \sqrt{1 + tang^{2} \alpha} + log \sqrt{tang\ \alpha + \sqrt{1 + tang^{2} \alpha}} - z \sqrt{1 + z^{2}} - log.\ (z + \sqrt{1 + 2^{2}} \right]$$

et à celle $a = b^{\frac{1}{3}}$ pour obtenir les valeurs de a dont on aura besoin pour les arcs approchant de 90°.

On remarquera que la valeur de x obtenue par le dernier arc, s'élèvera à quelques mètres seulement. En ajoutant toutes les abcisses obtenues, à partir de l'origine, on aura la position approximative de l'asymptote verticale.

Il est facile de voir que la position réelle de l'asymptote cherchée diffère très-peu de celle que donne le calcul précédent, et de démontrer l'existence de l'asymptote dont il s'agit ; en effet on trouve pour

$$z = -\infty\ ;\ x = 5 \sqrt[5]{\frac{1}{gn^{4}}} \quad \frac{1}{\infty} = o.$$

La division de la courbe par portions d'arcs permettra d'avoir égard, si on le veut, à la variation de densité du milieu, comme il a déjà été expliqué à la page 66.

La recherche des asymptotes est plus curieuse qu'utile. Cette recherche était pourtant nécessaire pour compléter la description de la trajectoire.

Pour terminer ce qui est relatif à l'application de nos for-

mules, cherchons le maximum de portée de quelques projectiles.

Nous avons vu que pour $V = \infty$ on avait pour angle de plus grande portée $\alpha = 11^\circ\ 19' \ldots$; on trouve dans ce cas 1132ᵐ pour la portée maximum de la balle du fusil d'infanterie; il n'est donc pas étonnant que cette portée ait été fixée expérimentalement à 1000ᵐ.

Pour la balle oblongue de même diamètre et du poids de 47 gr. $^1/_2$ et pour laquelle $n' = \frac{27}{47.5}\, n$ on aurait 1778ᵐ. Ceci suppose que la résistance de l'air pour la balle ogivale est la même que pour la balle sphérique, et qu'il n'y a de différence que relativement aux masses des deux balles.

Pour un boulet de 24, on trouve 4530ᵐ pour limite extrême de la portée. Dans les expériences qui ont été faites à la Fère, en 1771, la plus grande portée de boulet de 24 a été de 4592ᵐ sous l'angle de 43°.

D'après Willantroys, M. de Valière, général d'artillerie, aurait obtenu, le 1ᵉʳ septembre, à la Fère, trois portées égales de 4872ᵐ avec des charges de 24 liv., 13 liv. et 9 livres, et sous l'angle de 45°. Ces portées, qui dépassent le maximum que nous avons trouvé tout à l'heure, sont vraisemblablement les plus fortes qui aient jamais été fournies par un canon de 24, en admettant toutefois qu'il n'y ait pas eu d'erreur dans les observations.

En supposant la température à 30°, l'air contenant autant de vapeur que possible, et une hauteur minimum du baromètre, on arrive à un maximum qui comprend les trois portées dont nous venons de parler. Il n'est pas impossible, après tout, que le tir ait eu lieu dans des circonstances à peu près identiques avec celles que nous admettons ici; la saison dans laquelle l'expérience a été faite rend cette conjecture assez

plausible; ce qu'il y a de plus remarquable, c'est l'égalité parfaite de trois portées obtenues avec des charges si différentes.

On trouverait également 5726^{m} pour la portée maximum d'une bombe ordinaire de 32^{cent}... Il est d'expérience que les projectiles de cette espèce n'ont jamais été portés au delà de 4500^{m}.

Pour les boulets ogivaux des expériences de Suède, on aurait $n = 0.000015$ environ et $x = 10814^{m}$. On voit par cette limite quelle puissance d'effet les boulets allongés peuvent avoir. Il est donc présumable que l'adoption de ces projectiles donnera à l'artillerie une supériorité décisive sur les tirs de mousqueterie les plus parfaits, en admettant toutefois que les pièces soient pourvues de lunettes de pointage, ce que la lenteur habituelle du tir rend très-facile.